Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Л.И. ГОЛОВИНА
и И.М.ЯГЛОМ

ИНДУКЦИЯ В ГЕОМЕТРИИ

*

ФИЗМАТГИЗ • 1961

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 21

Л. И. ГОЛОВИНА и И. М. ЯГЛОМ

ИНДУКЦИЯ В ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4
Введение: Что такое метод математической индукции? (примеры 1—4, задачи 1—2) 5
§ 1. Вычисление по индукции (примеры 5—9, задачи 3—5) . . . 10
§ 2. Доказательство по индукции (примеры 10—19, задачи 6—13). 17
§ 3. Построение по индукции (примеры 20—23, задачи 14—16) . 43
§ 4. Нахождение геометрических мест по индукции (примеры 24—25, задачи 17—23) 52
§ 5. Определение по индукции (примеры 26—27, задачи 24—32) . 59
§ 6. Индукция по числу измерений (примеры 28—37, задачи 33—40) 72
1. Вычисление с помощью индукции по числу измерений (пример 28, задача 33) 76
2. Доказательство с помощью индукции по числу измерений (примеры 29—35, задачи 34—39) 79
3. Нахождение геометрических мест с помощью индукции по числу измерений (пример 36) 95
4. Определение с помощью индукции по числу измерений (пример 37, задача 40) 98

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книжка, рассчитанная в первую очередь на учащихся старших (9-го и 10-го) классов средней школы, учителей математики и студентов физико-математических факультетов пединститутов, примыкает к книжке И. С. Соминского «Метод математической индукции», составляющей 3-й выпуск серии «Популярные лекции по математике», и может рассматриваться как ее продолжение; тем читателям, которые знакомы с книжкой И. С. Соминского, она будет особенно интересна.

Книжка содержит 37 примеров, решения которых подробно разобраны, и 40 задач, сопровождаемых краткими указаниями. Она посвящена разнообразным применениям метода математической индукции к решению геометрических задач. Наиболее поучительны здесь, по нашему мнению, различные аспекты метода математической индукции; отдельные (но, разумеется, не все) примеры и задачи могут также представлять и определенный самостоятельный интерес.

В основу книжки положены две лекции, прочитанные И. М. Ягломом московским школьникам — участникам школьного математического кружка при Московском государственном университете.

Л. И. Головина
И. М. Яглом

ВВЕДЕНИЕ: ЧТО ТАКОЕ МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ?

Индукцией называется всякое рассуждение, содержащее переход от частных утверждений к общим, справедливость которых выводится из справедливости частных утверждений. Метод математической индукции есть особый метод математического доказательства, позволяющий на основании частных наблюдений делать заключения о соответствующих общих закономерностях. Идею этого метода проще всего уяснить себе на примерах. Мы начнем поэтому с рассмотрения следующего примера.

Пример 1. Определить сумму n первых нечетных чисел

$$1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

Решение. Обозначив эту сумму через $S(n)$, положим $n=1, 2, 3, 4, 5$; тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} S(1)&=1,\\ S(2)&=1+3=4,\\ S(3)&=1+3+5=9,\\ S(4)&=1+3+5+7=16,\\ S(5)&=1+3+5+7+9=25. \end{aligned}$$

Мы замечаем, что при $n=1, 2, 3, 4, 5$ сумма n последовательных нечетных чисел равна n^2. Можно ли отсюда сразу сделать вывод, что это имеет место при любом n? Нет, подобное заключение «по аналогии» может иногда оказаться ошибочным. Приведем несколько примеров.

Рассмотрим числа вида $2^{2^n}+1$. При $n=0, 1, 2, 3, 4$ числа $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65\,537$ — простые. Замечательный французский математик XVII в. П. Ферма предполагал, что все числа такого

вида — простые. Однако в XVIII в. другой великий ученый, петербургский академик Л. Эйлер нашел, что

$$2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\cdot 6\,700\,417$$

— составное число.

Вот другой пример такого рода. Знаменитый немецкий математик XVII в., один из создателей так называемой «высшей математики», Г. В. Лейбниц доказал, что при всяком целом положительном n число n^3-n делится на 3, число n^5-n делится на 5, число n^7-n делится на 7 [1]). На основании этого он предположил было, что при всяком нечетном k и любом натуральном n число n^k-n делится на k, но скоро сам заметил, что $2^9-2=510$ не делится на 9.

Известный советский математик Д. А. Граве впал однажды в ошибку такого же рода, предположив, что для всех простых чисел p число $2^{p-1}-1$ не делится на p^2, так как непосредственная проверка подтвердила это предположение для всех простых чисел p, меньших тысячи. Вскоре, однако, было установлено, что $2^{1092}-1$ делится на 1093^2 (1093 — простое число), т. е. предположение Граве оказалось ошибочным.

Приведем еще один весьма убедительный пример. Подставляя в выражение $991n^2+1$ вместо n последовательные целые числа 1, 2, 3, ..., мы никогда не получим числа, являющегося полным квадратом, сколько бы дней или даже лет мы ни посвятили этим вычислениям. Однако если мы сделаем отсюда вывод, что все числа такого вида не являются квадратами, то мы ошибемся, так как на самом деле оказывается, что среди чисел вида $991n^2+1$ имеются и квадраты; только наименьшее значение n, при котором число $991n^2+1$ есть полный квадрат, очень велико. Вот это число:

$$n=12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

Все эти примеры должны предостеречь читателя от необоснованных заключений по аналогии.

Вернемся теперь к задаче о вычислении суммы n первых нечетных чисел. Из предыдущего ясно, что формулу

$$S(n)=n^2 \qquad (1)$$

нельзя считать доказанной, для скольких бы первых значений n

[1]) См., например, книгу Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. I, М., Гостехиздат, 1954, задачи 27 а), б), в) (серия «Библиотека математического кружка», вып. 1).

мы ее ни проверили, так как всегда можно опасаться, что где-то за пределами рассмотренных случаев эта формула перестает быть верной. Чтобы убедиться в справедливости формулы (1) для всех n, надо доказать, что как бы далеко мы ни двигались вдоль натурального ряда чисел, мы никогда не сможем перейти от значений n, для которых формула (1) еще верна, к значениям n, для которых она уже не верна.

Итак, *предположим, что для какого-то числа n наша формула верна, и попытаемся доказать, что тогда она верна и для следующего числа $n+1$.*

Таким образом, мы полагаем, что

$$S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2;$$

вычислим

$$S(n+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2n+1).$$

В силу сделанного нами предположения, сумма n первых слагаемых в правой части последнего равенства равна n^2, следовательно,

$$S(n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Итак, предположив, что формула $S(n) = n^2$ справедлива для какого-то натурального числа n, мы смогли доказать ее справедливость и для непосредственно следующего числа $n+1$. Но выше мы проверили, что эта формула верна для $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Следовательно, она будет верна и для числа $n = 6$, следующего за 5, а тогда она верна и для $n = 7$, и для $n = 8$, и для $n = 9$ и т. д. Теперь наша формула может считаться доказанной для любого числа слагаемых. Этот метод доказательства и называется методом математической индукции.

Итак, *доказательство методом математической индукции состоит из следующих двух частей*:

1°. *Проверки, что высказанное утверждение справедливо для наименьшего значения n, для которого оно имеет смысл* [1]);

2°. *Доказательства, что если это утверждение справедливо для какого-то натурального числа n, то оно справедливо и для непосредственно следующего числа $n+1$.*

[1]) Разумеется, этим значением n не обязательно является единица; так, например, утверждение об общих свойствах n-угольников имеет смысл при $n \geqslant 3$.

В необходимости второй части доказательства мы уже убедились на ряде примеров. Очевидно, что и первая часть рассуждения не менее необходима: ведь доказательство того, что если какое-то предложение справедливо для некоторого числа n, то оно справедливо и для числа $n+1$, само по себе еще ровно ничего не дает, так как может оказаться, что это предложение не справедливо вообще ни для одного целого значения n. Например, если предположить, что какое-либо целое число n равно следующему за ним, т. е. что $n=n+1$, то, прибавив к обеим частям этого равенства по единице, мы получим, что $n+1=n+2$, т. е. что и число $n+1$ равно следующему за ним. Отсюда, разумеется, вовсе не вытекает, что высказанное предположение справедливо для всех n — оно не справедливо ни для какого целого числа.

Применение метода математической индукции не обязательно строго следует приведенной выше схеме. Так, например, иногда приходится делать предположение, что рассматриваемое предложение справедливо, скажем, для двух последовательных чисел $n-1$ и n, и доказывать, что в таком случае оно справедливо и для числа $n+1$; в этом случае в качестве первого шага рассуждения необходимо проверить, что предложение справедливо для двух первых значений n, например для $n=1$ и $n=2$ (см. ниже примеры 16, 17, 18). Иногда в качестве второго шага рассуждения доказывают справедливость предложения для какого-то значения n, предполагая его справедливость для всех натуральных чисел k, меньших n (см. ниже примеры 7, 8, 9, 15).

Рассмотрим еще несколько примеров применения метода математической индукции. Формулы, которые мы получим при этом, будут использованы в дальнейшем.

Пример 2. Доказать, что сумма n первых натуральных чисел — обозначим ее через $S_1(n)$ — равна $\frac{n(n+1)}{2}$, т. е.

$$S_1(n)=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (2)$$

Решение. 1°. $S_1(1)=1=\frac{1(1+1)}{2}$.

2°. Предположим, что

$$S_1(n)=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Тогда

$$S_1(n+1) = 1+2+3+\ldots+n+(n+1) =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2},$$

чем утверждение полностью доказано.

Пример 3. Доказать, что сумма $S_2(n)$ квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

$$S_2(n) = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (3)$$

Решение. 1°. $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$.

2°. Предположим, что

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Тогда

$$S_2(n+1) = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

и окончательно

$$S_2(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Задача 1. Доказать, что сумма $S_3(n)$ кубов n первых натуральных чисел равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$:

$$S_3(n) = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (4)$$

Пример 4. Доказать, что

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \quad (5)$$

Решение. 1°. $1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$.

2°. Если

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

то

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)n+n(n+1) =$$
$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Задача 2. Вывести формулу (5) из формул (2) и (3).

Указание. Предварительно показать, что

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\,n=$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-(1+2+3+\ldots+n).$$

Метод математической индукции, по самому существу своему связанный с понятием числа, имеет наибольшие применения в арифметике, алгебре и теории чисел. Много интересных примеров такого рода собрано в указанной в предисловии книжке И. С. Соминского. Но понятие целого числа является основным не только в теории чисел, специально занимающейся изучением его свойств, но и вообще во всей математике. Поэтому метод математической индукции применяется в самых разнообразных областях математики. В частности, особенно красивы различные применения этого метода в геометрии — им и посвящена настоящая книжка.

Дальнейшее изложение мы разобьем на несколько разделов, соответственно разным типам геометрических задач.

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПО ИНДУКЦИИ

Наиболее естественное применение метода математической индукции в геометрии, близкое к использованию этого метода в теории чисел и в алгебре,— это применение к решению геометрических задач на вычисление. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5. Вычислить сторону a_{2^n} правильного 2^n-угольника, вписанного в круг радиуса R.

Решение. 1°. При $n=2$ правильный 2^n-угольник есть квадрат; его сторона $a_4=R\sqrt{2}$. Далее, согласно формуле удвоения

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}}$$

находим, что сторона правильного восьмиугольника $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, сторона правильного шестнадцатиугольника $a_{16}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, сторона правильного тридцатидвухугольника $a_{32}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. Можно предположить поэтому, что сторона правильного вписанного

2^n-угольника при любом $n \geqslant 2$ равна

$$a_{2^n} = R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ двоек}}}. \qquad (6)$$

2°. Допустим, что сторона правильного вписанного 2^n-угольника выражается формулой (6). В таком случае по формуле удвоения

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2\frac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n-2 \text{ двоек}}}{4}}} =$$

$$= R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ двоек}}},$$

откуда следует, что формула (6) справедлива для всех n.

Из формулы (6) вытекает, что длина $C = 2\pi R$ окружности радиуса R равна пределу выражения $2^n R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n-2 \text{ двоек}}}$ при неограничением возрастании n и, следовательно,

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n-2 \text{ двоек}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n-1 \text{ двоек}}}.$$

Задача 3. Пользуясь формулой (6), доказать, что π равно пределу, к которому стремится выражение

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots},$$

когда число множителей (квадратных корней) в знаменателе неограниченно возрастает (формула Виета[1]). Закон составления множителей определяется первыми тремя, которые уже написаны.

---

[1]) Ф. Виета (1540—1603) — известный французский математик, один из создателей алгебраической символики.

Указание. Обозначим через S_{2^n} площадь правильного 2^n-угольника, вписанного в круг радиуса R, а через h_{2^n} — его апофему. Тогда из формулы (6) следует, что

$$h_{2^n}=\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}=\frac{R}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ двоек}}$$

и

$$S_{2^n}=\frac{1}{2}(2^n a_{2^n})\,h_{2^n}=2^{n-2}R^2\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-3\text{ двоек}}}=$$

$$=2^{n-2}Ra_{2^{n-1}}$$

(здесь предполагается, что $n\geqslant 3$). Далее, имеем:

$$\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}}=\frac{2^{n-1}a_{2^n}h_{2^n}}{2^{n-1}Ra_{2^n}}=\frac{h_{2^n}}{R}=\cos\frac{180^\circ}{2^n},$$

откуда следует, что

$$\frac{S_4}{S_{2^n}}=\frac{S_4}{S_8}\cdot\frac{S_8}{S_{16}}\cdot\ldots\cdot\frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^n}}=\cos\frac{180^\circ}{4}\cos\frac{180^\circ}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{180^\circ}{2^{n-1}}.$$

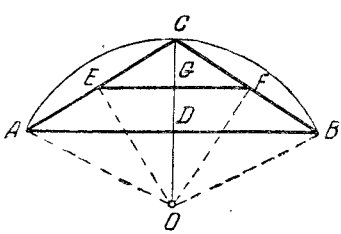
Так как $S_4=2R^2$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}=\pi R^2$, то $\frac{2}{\pi}$ равно пределу выражения

$$\cos 45^\circ\cos\frac{45^\circ}{2}\cos\frac{45^\circ}{4}\ldots$$

Затем остается только воспользоваться формулой

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Пример 6. Указать правило вычисления радиусов r_n и R_n вписанной и описанной окружностей правильного 2^n-угольника, имеющего данный периметр P.



Черт. 1.

Решение. 1°. $r_2=\frac{P}{8}$, $R_2=\frac{P\sqrt{2}}{8}$.

2°. Зная радиусы r_n и R_n вписанной и описанной окружностей правильного 2^n-угольника периметра P, вычислим радиусы r_{n+1} и R_{n+1} вписанной и описанной окружностей 2^{n+1}-угольника того же периметра. Пусть AB (черт. 1) — сторона правильного 2^n-угольника периметра P, O — его центр, C — середина дуги AB и D — середина хорды AB; далее, пусть

EF — средняя линия треугольника ABC и G — ее середина. Так как

$$\angle EOF = \angle EOC + \angle FOC = \\ = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

то EF равно стороне правильного 2^{n+1}-угольника, вписанного в круг радиуса OE, причем периметр этого 2^{n+1}-угольника равен

$$2^{n+1}EF = 2^{n+1}\frac{AB}{2} = 2^n AB,$$

т. е. тоже равен P. Таким образом, $r_{n+1} = OG$ и $R_{n+1} = OE$. Далее, ясно, что $OC - OG = OG - OD$, т. е. $R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n$, откуда $r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$. Наконец, из прямоугольного треугольника OEC имеем $OE^2 = OC \cdot OG$, т. е. $R_{n+1}^2 = R_n r_{n+1}$ и $R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_{n+1}}$. Итак, окончательно:

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad \text{и} \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_{n+1}}.$$

Рассмотрим последовательность $r_2, R_2, r_3, R_3, \ldots, r_n, R_n, \ldots$ Члены этой последовательности стремятся к радиусу окружности длины P, т. е. к $\frac{P}{2\pi}$. В частности, при $P = 2$ имеем $r_2 = \frac{1}{4}$ и $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Полагая еще $r_1 = 0$ и $R_1 = \frac{1}{2}$, получаем следующую теорему:

Если составить последовательность чисел

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}+1}{8},\ \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{8},\ \frac{\sqrt{2\sqrt{2+\sqrt{2}}+4}+\sqrt{2}+1}{16}, \ldots,$$

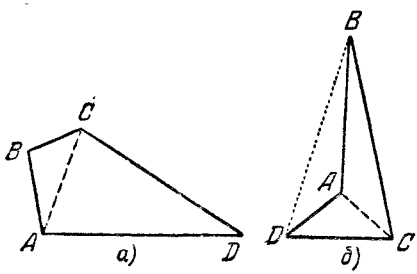
первые два члена которой равны 0 *и* $\frac{1}{2}$, *а каждый из остальных попеременно равен среднему арифметическому и среднему геометрическому двух предшествующих, то члены этой последовательности стремятся к* $\frac{1}{\pi}$.

Пример 7. Определить сумму внутренних углов n-угольника (не обязательно выпуклого!).

Решение. 1°. Сумма внутренних углов треугольника равна $2d$. Сумма внутренних углов четырехугольника равна

$4d$, так как каждый четырехугольник можно разбить на два треугольника (черт. 2).

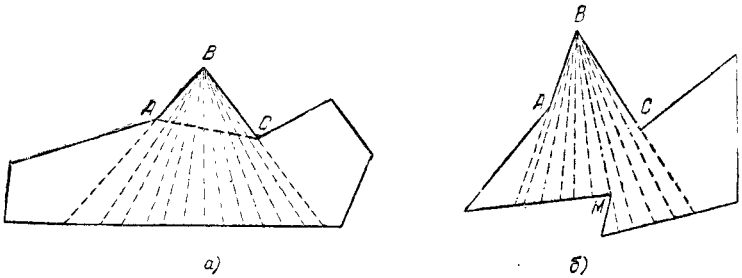
2°. Предположим уже доказанным, что сумма внутренних углов любого k-угольника, где $k < n$, равна $2d(k-2)$, и рассмотрим n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$.



Черт. 2.

Прежде всего докажем, что во всяком многоугольнике можно найти диагональ[1]), разбивающую его на два многоугольника с меньшим числом сторон (для выпуклого многоугольника это ясно). Пусть A, B, C — любые три смежные вершины многоугольника. Через вершину B проведем всевозможные лучи, заполняющие внутренний угол ABC многоугольника до пересечения их с контуром многоугольника. Возможны два случая:

А. Все лучи упираются в одну и ту же сторону многоугольника (черт. 3, *а*). В этом случае диагональ AC разбивает наш n-угольник на $(n-1)$-угольник и треугольник.



Черт. 3.

Б. Не все лучи упираются в одну и ту же сторону (черт. 3, *б*). В этом случае один из лучей будет проходить через некоторую вершину M многоугольника, и диагональ BM будет разбивать многоугольник на два многоугольника с меньшим числом сторон.

[1]) Заметим, что диагональ невыпуклого многоугольника может пересекать его или целиком лежать вне его (как диагональ BD на черт. 2, *б*).

Вернемся теперь к доказательству нашего основного утверждения. В n-угольнике $A_1A_2\ldots A_n$ проведем диагональ A_1A_k, разбивающую его на k-угольник $A_1A_2\ldots A_k$ и $(n-k+2)$-угольник $A_1A_kA_{k+1}\ldots A_n$. Согласно сделанному предположению суммы внутренних углов k-угольника и $(n-k+2)$-угольника соответственно равны $2d(k-2)$ и $2d[(n-k+2)-2]=2d(n-k)$; поэтому сумма углов n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ будет равна

$$2d(k-2)+2d(n-k)=2d(n-2),$$

откуда следует справедливость нашего утверждения для всех n.

Как мы видели в примере 7, во всяком многоугольнике можно найти диагональ, разбивающую его на два многоугольника с меньшим числом сторон. Каждый из этих многоугольников, не являющийся треугольником, можно снова разбить на два многоугольника с меньшим числом сторон и т. д. Следовательно, каждый многоугольник можно непересекающимися диагоналями разбить на треугольники.

Пример 8. На сколько треугольников n-угольник (не обязательно выпуклый) может быть разбит своими непересекающимися диагоналями?

Решение. 1°. Для треугольника это число равно единице (в треугольнике нельзя провести ни одной диагонали); для четырехугольника это число равно, очевидно, двум (см. черт. 2, *а* и *б*).

2°. Предположим, что мы уже знаем, что каждый k-угольник, где $k<n$, разбивается непересекающимися диагоналями на $k-2$ треугольника (независимо от способа разбиения). Рассмотрим одно из разбиений n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ на треугольники. Пусть A_1A_k — одна из диагоналей этого разбиения; она делит n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ на k-угольник $A_1A_2\ldots A_k$ и $(n-k+2)$-угольник $A_1A_kA_{k+1}\ldots A_n$. В силу сделанного предположения общее число треугольников разбиения будет равно

$$(k-2)+[(n-k+2)-2]=n-2,$$

тем самым наше утверждение доказано для всех n.

Задача 4. Определить число N непересекающихся диагоналей, используемых при разбиении n-угольника на треугольники.

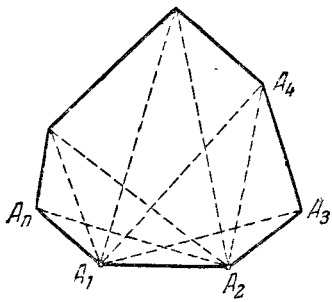
Указание. Из того, что N диагоналей и n сторон n-угольника являются сторонами $n-2$ треугольников (см. пример 8), следует, что

$$2N+n=3(n-2),\quad N=n-3.$$

Пример 9. Указать правило вычисления числа $P(n)$ способов, которыми выпуклый n-угольник может быть разбит на треугольники непересекающимися диагоналями.

Решение. 1°. Для треугольника это число равно, очевидно, единице: $P(3)=1$.

2°. Предположим, что мы уже определили числа $P(k)$ для всех $k<n$; найдем, чему равно в таком случае $P(n)$. Для этого рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ (черт. 4). При всяком разбиении его на треугольники сторона A_1A_2 будет стороной одного из треугольников разбиения, третья вершина этого треугольника может совпасть с каждой из точек $A_3, A_4, \ldots, A_n$. Число способов разбиения n-угольника, при которых эта вершина совпадает с точкой A_3, равно числу способов разбиения на треугольники $(n-1)$-угольника $A_1A_3A_4\ldots A_n$, т. е. равно $P(n-1)$. Число способов разбиения, при которых эта вершина совпадает с A_4, равно числу способов разбиения $(n-2)$-угольника $A_1A_4A_5\ldots A_n$, т. е. равно $P(n-2)=P(n-2)P(3)$; число способов разбиения, при которых она совпадает с A_5, равно $P(n-3)\cdot P(4)$, так как каждое из разбиений $(n-3)$-угольника $A_1A_5\ldots A_n$ можно комбинировать при этом с каждым из разбиений четырехугольника $A_2A_3A_4A_5$, и т. д. Таким образом, мы приходим к следующему соотношению:



Черт. 4.

$$P(n)=P(n-1)+P(n-2)\,P(3)+P(n-3)\,P(4)+\ldots$$
$$\ldots+P(3)\,P(n-2)+P(n-1). \qquad (7)$$

С помощью этой формулы последовательно получаем:

$$P(4)=P(3)+P(3)=2,$$
$$P(5)=P(4)+P(3)\,P(3)+P(4)=5,$$
$$P(6)=P(5)+P(4)\,P(3)+P(3)\,P(4)+P(5)=14,$$
$$P(7)=P(6)+P(5)\,P(3)+P(4)\,P(4)+P(3)P(5)+P(6)=42,$$
$$P(8)=P(7)+P(6)\,P(3)+P(5)\,P(4)+P(4)\,P(5)+$$
$$+P(3)\,P(6)+P(7)=132 \quad \text{и т. д.}$$

Примечание. С помощью формулы (7) можно доказать, что при всяком n

$$P(n)=\frac{2\,(2n-5)!}{(n-1)!\,(n-3)!}$$

[см., например, книгу А. М. Яглома и И. М. Яглома, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 5), решение задачи 51 б)].

Задача 5. На сколько частей выпуклый n-угольник разбивается всеми своими диагоналями, если никакие три из них не пересекаются в одной точке.

Указание. Выпуклый $(n+1)$-угольник $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ диагональю A_1A_n разбивается на n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ и треугольник $A_1A_nA_{n+1}$. Считая известным число $F(n)$ частей, на которые разбивается своими диагоналями n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, сосчитаем, сколько частей добавляется от присоединения вершины A_{n+1} (это число на единицу больше числа частей, на которые диагонали, выходящие из вершины A_{n+1}, разбиваются остальными диагоналями). Так мы найдем соотношение

$$F(n+1)=F(n)+(n-1)+1\,(n-2)+2\,(n-3)+\ldots$$
$$\ldots+(n-3)\,2+(n-2)\,1.$$

которое с помощью формул (2) и (5) Введения (стр. 8—9) можно переписать в виде

$$F(n+1)=F(n)+(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=$$
$$=F(n)+\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}-1.$$

Суммируя значения $F(n)$, $F(n-1)$, ..., $F(4)$ и используя формулы (2), (3) и (4) Введения, получим:

$$F(n)=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

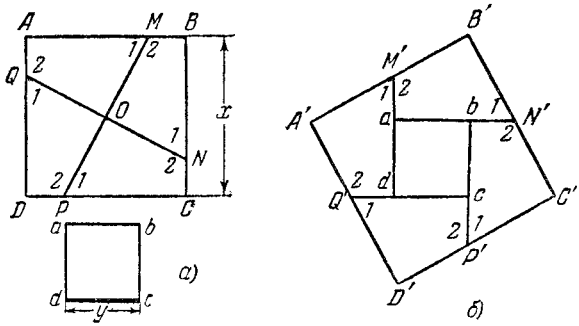
§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПО ИНДУКЦИИ

Уже некоторые предложения предыдущего параграфа можно рассматривать как примеры использования метода математической индукции для доказательства геометрических теорем. Например, предложение примера 7 можно сформулировать так: доказать, что сумма углов n-угольника равна $2d\,(n-2)$; в примере 8 было доказано, что непересекающиеся диагонали разбивают n-угольник на $n-2$ треугольника. В этом параграфе мы рассмотрим дальнейшие примеры такого же рода.

Пример 10. Дано n произвольных квадратов. Доказать, что их можно разрезать на части так, что из полученных частей можно сложить новый квадрат.

Решение. 1°. При $n=1$ наше утверждение не нуждается в доказательстве. Докажем, что и при $n=2$ оно также

справедливо. Обозначим стороны заданных квадратов $ABCD$ и $abcd$ соответственно через x и y; пусть $x \geqslant y$. На сторонах квадрата $ABCD$ со стороной x (черт. 5,$а$) отложим отрезки $AM = BN = CP = DQ = \frac{x+y}{2}$ и разрежем этот квадрат по прямым MP и NQ, которые, как легко видеть, пересекаются в центре O квадрата и образуют между собой прямой угол, разбивая квадрат на четыре равные части. Эти куски приложим ко второму квадрату, как показано на черт. 5, $б$.



Черт. 5.

Полученная фигура тоже будет квадратом, так как углы при точках M', N', P', Q' — развернутые, углы A', B', C', D' — прямые и $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$.

2°. Допустим, что наше утверждение уже доказано для n квадратов, и пусть дано $n+1$ квадратов $K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}$.

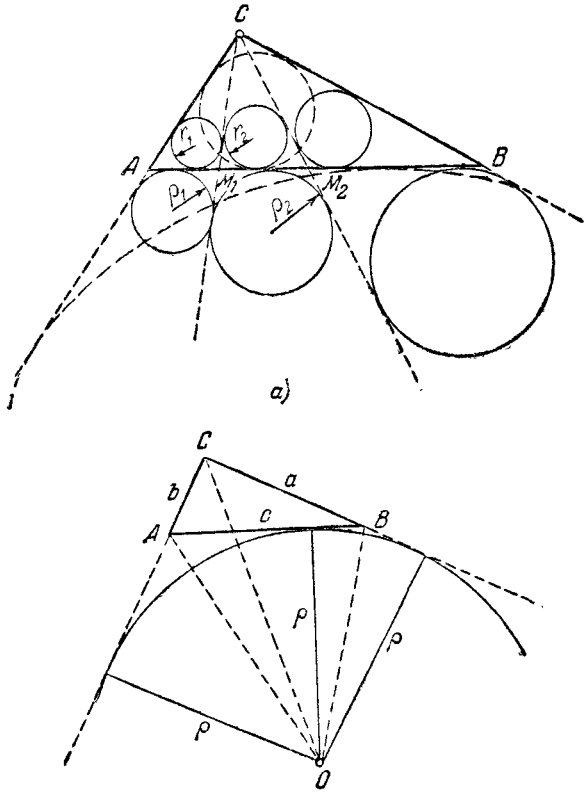
Выберем любые два из этих квадратов, скажем K_n и K_{n+1}. Как показано в п. 1°, разрезая один из этих квадратов и прикладывая полученные куски ко второму, можно получить новый квадрат K'. Далее, согласно сделанному нами предположению квадраты $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}, K'$ можно так разрезать на части, что из этих частей можно сложить новый квадрат, что и требовалось доказать.

Пример 11. Дан треугольник ABC. Через его вершину C проведено $n-1$ прямых $CM_1, CM_2, \ldots, CM_{n-1}$, разбивающих треугольник на n меньших треугольников $ACM_1, M_1CM_2, \ldots, M_{n-1}CB$. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ соответственно радиусы вписанных и вневписанных окружностей этих треугольников (все вневписанные окружности вписаны в угол C треугольника; см. черт. 6, $а$), и пусть r и ρ —

радиусы вписанной и вневписанной окружностей самого треугольника ABC. Доказать, что

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdots \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

Решение. Обозначим через S площадь треугольника ABC и через p — его полупериметр; тогда, как известно, $S = pr$.



Черт. 6.

С другой стороны, если O — центр вневписанной окружности этого треугольника (черт. 6, *б*), то

$$S = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OCB} - S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} b\rho + \frac{1}{2} a\rho - \frac{1}{2} c\rho =$$

$$= \frac{1}{2} (b + a - c)\rho = (p - c)\rho;$$

следовательно,

$$pr=(p-c)\rho \quad \text{и} \quad \frac{r}{\rho}=\frac{p-c}{p}.$$

Далее, по известным формулам тригонометрии

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)(p-a)(p-c)}{p(p-a)\quad p(p-b)}}=\frac{p-c}{p}=\frac{r}{\rho}. \qquad (8)$$

После этих предварительных замечаний обратимся к доказательству теоремы.

1°. При $n=1$ наше утверждение не нуждается в доказательстве. Докажем его справедливость для $n=2$. В этом случае треугольник ABC прямой CM разбит на два меньших треугольника ACM и CMB. В силу формулы (8)

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{CMA}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{CMB}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{CMA}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ-\angle CMA}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{\rho}.$$

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для $n-1$ прямых, и пусть дано n прямых $CM_1, CM_2, \ldots, CM_n$, разбивающих треугольник ABC на $n+1$ меньших треугольников ACM_1, M_1CM_2, $\ldots$, M_nCB. Рассмотрим два из этих треугольников, скажем ACM_1 и CM_1M_2. Как мы видели в п. 1°,

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r_{12}}{\rho_{12}},$$

где r_{12} и ρ_{12} — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ACM_2. Но для n треугольников ACM_2, M_2CM_3, $\ldots$, M_nCB в силу сделанного предположения имеет место равенство

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}}\cdot\frac{r_3}{\rho_3}\cdots\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}}=\frac{r}{\rho}$$

и, следовательно,

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}\cdots\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}}=\frac{r}{\rho}.$$

Задача 6. Пусть прямые CM и CM' двумя способами разбивают треугольник ABC на два треугольника ACM, CMB и ACM', $CM'B$; r_1, r_2 и r_1', r_2' — соответственно радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники. Доказать, что если $r_1 = r_1'$, то $r_2 = r_2'$, и что аналогичное свойство имеет место также и для радиусов вневписанных окружностей.

Указание. В обозначениях примера 11 доказать сначала, что

$$\frac{r}{\varrho} = 1 - \frac{2r}{h} \quad \text{и} \quad \frac{\varrho}{r} = 1 + \frac{2\varrho}{h},$$

(где h — высота, проведенная из вершины C), откуда вытекают равенства

$$\left(1 - \frac{2r_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2r_2}{h}\right) = 1 - \frac{2r}{h} = \left(1 - \frac{2r_1'}{h}\right)\left(1 - \frac{2r_2'}{h}\right)$$

и

$$\left(1 + \frac{2\varrho_1}{h}\right)\left(1 + \frac{2\varrho_2}{h}\right) = 1 + \frac{2\varrho}{h} = \left(1 + \frac{2\varrho_1'}{h}\right)\left(1 + \frac{2\varrho_2'}{h}\right).$$

Задача 7. В обозначениях примера 11 доказать, что

$$\frac{r_1 + \varrho_1}{R_1} + \frac{r_2 + \varrho_2}{R_2} + \ldots + \frac{r_n + \varrho_n}{R_n} = \frac{r + \varrho}{R},$$

где R_1, R_2, ..., R_n и R — соответственно радиусы описанных окружностей треугольников ACM_1, M_1CM_2, ..., M_nCB и ABC.

Указание. Как известно, $S = pr = (p - c)\varrho = \dfrac{abc}{4R}$, откуда, применяя теорему косинусов, получаем:

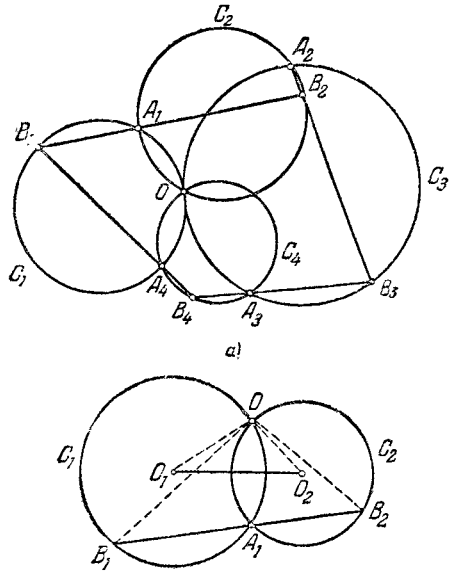
$$\frac{r + \varrho}{2R} = \frac{\dfrac{S}{p} + \dfrac{S}{p - c}}{\dfrac{abc}{2S}} = \frac{(a + b)[c^2 - (a - b)^2]}{2abc} =$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos CAB + \cos CBA.$$

Задача 8. Дано n окружностей C_1, C_2, ..., C_n, проходящих через точку O; вторые точки пересечения окружностей C_1 и C_2, C_2 и C_3, ..., C_n и C_1 обозначим, соответственно, через A_1, A_2, ..., A_n (черт. 7, *а*). Пусть B_1 — произвольная точка окружности C_1, отличная от O и от A_1. Проведем секущую B_1A_1, пересекающую окружность C_2 в точке B_2, затем секущую B_2A_2, пересекающую окружность C_3 в точке B_3, и т. д. (в случае,

если, например, точка B_2 совпадает с A_2, вместо секущей через точку A_2 проводим касательную к окружности C_2). Доказать, что полученная в конце концов на окружности C_1 точка B_{n+1} совпадает с B_1.

Указание. Предварительно доказать следующую лемму. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей C_1 и C_2, пересекающихся в точке O, и B_1B_2 — секущая, проведенная через вторую точку A_1 пересечения

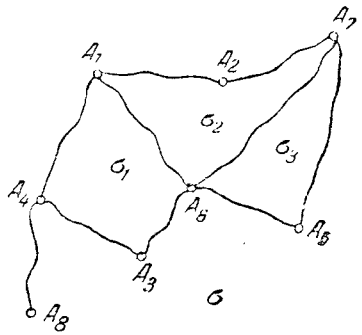


Черт. 7.

этих окружностей (см. черт. 7, *б*); тогда отрезки B_1B_2 и O_1O_2 видны из точки O под одним и тем же углом. Затем доказать предложенную теорему для трех окружностей. После этого, предполагая, что теорема справедлива для $n-1$ окружностей, рассмотреть n окружностей $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Провести секущую через точку B_{n-1} и точку пересечения окружностей C_{n-1} и C_1; к $n-1$ окружностям $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ применить индуктивное предположение.

Пусть на плоскости задана сеть линий, соединяющих между собой какие-то точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$ и не имеющих других общих точек; мы будем считать еще, что эта сеть линий «состоит из одного куска», т. е. что из каждой из точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$ можно попасть в любую другую, двигаясь только вдоль линий сети (свойство связности). Такую сеть

линий мы будем называть картой, заданные точки — ее вершинами, отрезки кривых между двумя смежными вершинами — границами карты, части плоскости, на которые она разбивается границами (в том числе и бесконечную внешнюю область),— странами карты. Так, на черт. 8 точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 являются вершинами карты, кривые A_1A_2,



Черт. 8.

A_2A_7, A_1A_6, A_6A_7, A_4A_1, A_4A_3, A_3A_6, A_6A_5, A_5A_7, A_4A_8 — ее границами, области σ_1, σ_2, σ_3 и бесконечная внешняя область σ — ее странами.

Пример 12. Теорема Эйлера. Обозначим число стран произвольной карты через s, число ее границ — через l и число вершин — через p. Тогда

$$s+p=l+2.$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу l границ карты.

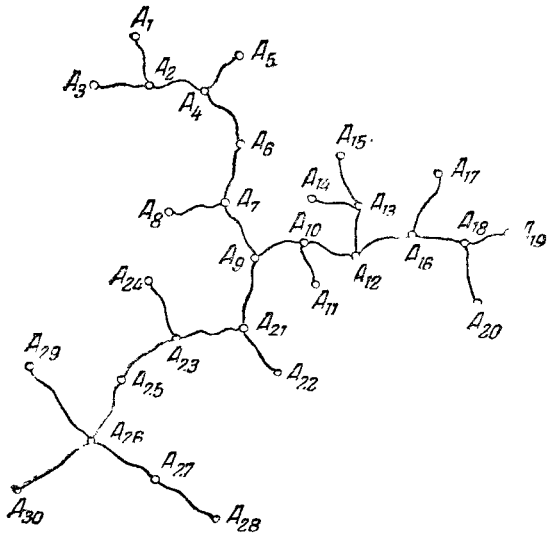
1°. Пусть $l=0$, тогда $s=1$, $p=1$; в этом случае

$$s+p=l+2.$$

2°. Предположим, что теорема справедлива для любой карты, имеющей n границ, и рассмотрим карту, содержащую $l=n+1$ границ, s стран и p вершин. Возможны два случая.

а) Для любых двух вершин карты существует единственный соединяющий их путь вдоль границ карты (хотя бы один такой путь существует ввиду связности карты). В этом случае карта не содержит ни одного замкнутого контура и, следовательно, имеет вид, изображенный на черт. 9; при этом $s=1$. Покажем, что на такой карте найдется хотя бы одна вершина, принадлежащая только одной границе (как вершина A_1 на

черт. 9; такую вершину мы будем называть крайней). Действительно, возьмем произвольную вершину карты. Если она — не крайняя, то она служит концом по крайней мере двух границ. Пройдем по одной из этих границ до второй ее вершины. Если и эта вершина — не крайняя, то она служит концом какой-то другой границы; пройдем по этой границе



Черт. 9.

до второго ее конца и т. д. Так как карта по условию не содержит замкнутых контуров, мы не вернемся ни к одной из ранее пройденных вершин и ввиду конечности числа вершин карты в конце концов придем к такой вершине, которая уже будет крайней. Удалив эту вершину вместе с единственной границей, имеющей ее своим концом, мы получим новую карту, в которой

$$l' = l - 1 = n, \quad s' = s = 1, \quad p' = p - 1,$$

причем эта новая карта останется, конечно, связной. В силу индуктивного предположения

$$s' + p' = l' + 2,$$

откуда и

$$s + p = l + 2.$$

б) Существуют две вершины, соединимые более чем одним путем (черт. 8). В таком случае на карте имеется некоторый

замкнутый контур, проходящий через эти вершины. Удалив одну из границ этого контура (без вершин), мы получим новую связную карту, в которой

$$l' = l - 1 = n, \quad p' = p, \quad s' = s - 1.$$

По предположению индукции

$$s' + p' = l' + 2,$$

откуда и

$$s + p = l + 2.$$

Пример 13. Доказать, что если в каждой вершине карты сходится не менее трех границ (т. е. если карта не содержит таких вершин, как A_2, A_3, A_5, A_8, и таких границ, как A_4A_8 на черт. 8), то найдется страна карты, имеющая не более пяти границ.

Решение. Так как в каждой из p вершин карты сходится не менее трех границ, то $3p$ не превосходит удвоенного числа границ $2l$ (удвоенного, ибо каждая граница соединяет две вершины); отсюда

$$p \leqslant \frac{2}{3} l. \tag{9}$$

Предположим теперь, что каждая из s стран карты имеет не менее шести границ; тогда $6s$ не превосходит удвоенного числа границ $2l$ (удвоенного, ибо каждая граница разделяет две страны), откуда

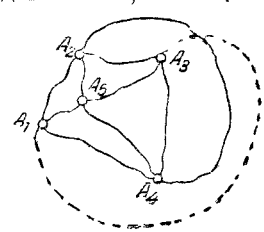
$$s \leqslant \frac{1}{3} l. \tag{10}$$

Неравенства (9) и (10) дают:

$$s + p \leqslant \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} l = l,$$

что противоречит теореме Эйлера. Следовательно, наше предположение о том, что каждая страна имеет не меньше шести границ, неверно.

Задача 9. На плоскости даны пять точек. Доказать, что нельзя соединить каждую из этих точек с каждой другой попарно не пересекающимися линиями (черт. 10).



Черт. 10.

Указание. Предположив, что все эти точки соединены с соблюдением условий задачи, мы придем к карте, имеющей 5 вершин, $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ границ и, следовательно, 7 стран (теорема Эйлера!).

Невозможность такой карты вытекает из рассуждений, близких к тем, которые привели к неравенству (10).

Другие примеры применения теоремы Эйлера о картах читатель сможет найти в книге: Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, М. — Л., Гостехиздат, 1952 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 6).

Задача 10. Доказать, что если p — число вершин, l — число ребер и s — число граней выпуклого многогранника, то

$$s+p=l+2$$

(теорема Эйлера о многогранниках).

Указание. Поместим многогранник внутрь шара достаточно большого радиуса и из центра шара (который можно считать находящимся внутри многогранника) спроектируем все точки многогранника на сферу (поверхность шара). Полученную на сфере карту спроектируем из произвольной ее точки, не принадлежащей никакой границе, на плоскость, касающуюся сферы в диаметрально противоположной точке (стереографическая проекция). К полученной плоской карте применим теорему Эйлера.

Задача 11. Доказать, что всякий многогранник имеет либо треугольную, либо четырехугольную, либо пятиугольную грань.

Указание. См. пример 13.

Задача 12. Доказать, что не существует многогранника с семью ребрами.

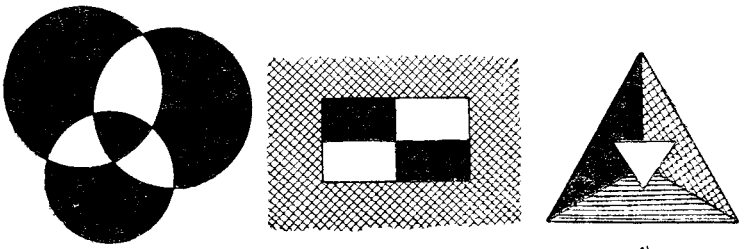
Указание. Применить теорему Эйлера.

Другие примеры применения теоремы Эйлера о многогранниках читатель может найти, например, в книге: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. III, М., Гостехиздат, 1954 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 3).

Задачи о раскраске карт

Пусть на плоскости задана некоторая карта. Мы будем говорить, что она правильно раскрашена, если каждая ее страна закрашена определенной краской, причем любые две страны, имеющие между собой общую границу, закрашены в разные цвета. Примером правильно раскрашенной карты может служить любая географическая карта. Всякую карту можно правильно раскрасить, например, закрасив каждую ее страну в особый цвет, однако такая раскраска неэкономна.

Естественно, возникает вопрос, каково то наименьшее число красок, которым можно правильно раскрасить заданную карту. Ясно, что, например, карту, изображенную на черт. 11, *а*, можно правильно раскрасить двумя красками; для правильной раскраски карты, изображенной на черт. 11, *б*, необходимы уже три краски; карту же, изображенную на черт. 11, *в*, можно правильно раскрасить только четырьмя красками. До сих пор не найдено ни одной карты, которую не удалось



а) *б*) *в*)

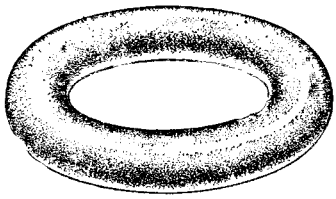
Черт. 11.

бы правильно раскрасить четырьмя красками. Впервые, повидимому, обратил внимание на это обстоятельство известный немецкий математик Мебиус более ста лет назад. С тех пор многие крупные ученые пытались решить эту проблему четырех красок, т. е. либо доказать, что четырех красок достаточно для раскраски любой карты, либо найти пример карты, которую четырьмя красками раскрасить нельзя, однако до сих пор этого никому не удалось сделать. Установлено только, что для правильной раскраски любой карты, во всяком случае, достаточно пяти красок (см. ниже пример 17). Нетрудно найти также условия, при которых карта может быть раскрашена двумя (пример 15) или тремя (пример 16) красками. Мы укажем, кроме того, некоторое условие, необходимое и достаточное для того, чтобы карта могла быть правильно раскрашена четырьмя красками (пример 18); вопрос же о том, выполняется ли это условие для любой карты или имеются ли карты, ему не удовлетворяющие, остается, понятно, открытым.

Любопытно отметить, что для некоторых поверхностей, устроенных, казалось бы, более сложно, чем плоскость, проблема раскраски карт решена полностью. Так, например, доказано, что на поверхности «баранки», или тора (черт. 12), для правильной раскраски любой карты достаточно семи

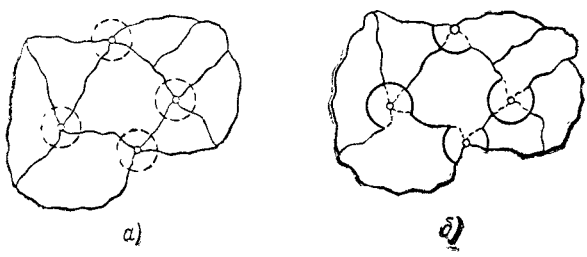
красок, причем существуют карты, которые нельзя правильно раскрасить шестью красками.

В дальнейшем мы будем предполагать, что карта не содержит неразделяющих границ, т. е. границ, по обе стороны от которых лежит одна и та же страна (как граница A_1A_8 на черт. 8, стр. 23), потому что в противном случае постановка задачи о правильной раскраске не имеет смысла. Мы будем также предполагать, что карта не содержит вершин, в которых сходятся лишь две границы (как вершина A_2 на черт. 8), ибо такая вершина была бы лишней. Другими словами, мы будем рассматривать лишь такие карты, в каждой вершине которых сходится не менее трех границ, т. е. карты, удовлетворяющие условию примера 13; результат этого примера в дальнейшем будет неоднократно использоваться. Нам будет удобно еще считать, что на карте имеется только одна бесконечная область, т. е. что карта не имеет границ, «уходящих в бесконечность»; можно показать, что отказ от этого последнего условия не изменил бы ни одного из дальнейших выводов.



Черт. 12.

Карту, в каждой вершине которой сходится ровно три границы, мы будем называть нормальной. Пусть дана



а) *б)*

Черт. 13.

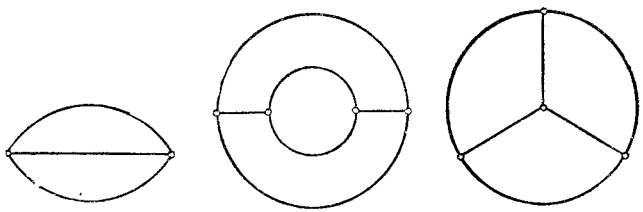
произвольная карта S (черт. 13, *а*). Выделив около каждой из вершин этой карты, в которой сходится более трех границ, достаточно малый кружок и присоединив его к одной из стран, окружающих эту вершину, мы получим нормальную карту S' с тем же числом стран (черт. 13, *б*); при этом из всякой правильной раскраски карты S' легко получается правильная раскраска карты S тем же числом красок и наоборот. Поэтому

в вопросе о правильной раскраске карт мы часто будем ограничиваться рассмотрением нормальных карт.

Выясним теперь, как устроены простейшие нормальные карты [1]). Пусть p — число вершин, l — число границ и s — число стран нормальной карты; тогда $2l = 3p$ (ср. выше стр. 25), откуда $p = \frac{2}{3}l$. Кроме того, по теореме Эйлера $s + p = l + 2$; значит,

$$s = (l - p) + 2 = \frac{l}{3} + 2$$

и, следовательно, $s \geqslant 2$. Но при $s = 2$ находим, что $l = 0$; такой карты, очевидно, не существует. Полагая $s = 3$, полу-



а) *б)* *в)*

Черт. 14.

чим $l = 3$ и $p = 2$; эта простейшая нормальная карта имеет вид, изображенный на черт. 14, *а*. При $s = 4$ получаем $l = 6$ и $p = 4$. Покажем, что в этом случае карта имеет вид, изображенный на черт. 14, *б* или *в*. Действительно, обозначим через k_2 число двуугольников карты, через k_3 — число ее треугольников и через k_4 — число четырехугольников (так как $p = 4$, карта не может иметь стран, число вершин которых больше четырех). Тогда

$$k_2 + k_3 + k_4 = s = 4$$

и

$$2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2l = 12$$

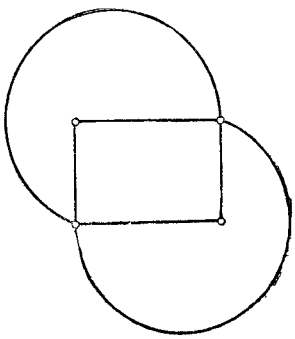
(ср. выше стр. 25); из последнего равенства видно, что k_3 четно. Сумма $k_2 + k_3 + k_4$, равная 4, с точностью до порядка слагаемых может иметь вид $2 + 2 + 0$, $2 + 1 + 1$, $3 + 1 + 0$, $4 + 0 + 0$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

[1]) Здесь и в дальнейшем не различаются «одинаково устроенные» карты (как изображенные на черт. 11, *в* и 23, *а*), страны и границы которых можно перенумеровать так, что на обеих картах одинаково занумерованные страны разделяются одинаково занумерованными границами.

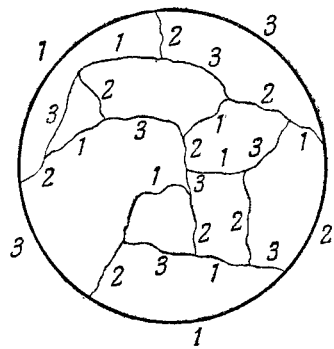
Если два из значений k равны 2 и одно — нулю, то при $k_2=2$, $k_3=2$, $k_4=0$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4=10<12$; при $k_2=2$, $k_3=0$, $k_4=2$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4=2l=12$— этому случаю отвечает карта, изображенная на черт. 14, *б*; при $k_2=0$, $k_3=2$, $k_4=2$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4=14>12$. Если одно из значений k равно 2 и два — единице, то лишь при $k_2=1$, $k_3=2$, $k_4=1$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4=12$—такая карта существует, но она не является нормальной (черт. 15).

Если одно из значений k равно 3 и одно — единице, то должно быть $k_3=0$, так как k_3 четно; при этом $2k_2+4k_4\neq12$.

Наконец, если одно из значений k равно 4 и остальные — нулю, то лишь при $k_2=k_4=0$, $k_3=4$ сумма $2k_2+3k_3+4k_4$ равна $2l=12$ — соответствующая карта имеет вид, изображенный на черт. 14, *в*.



Черт. 15.



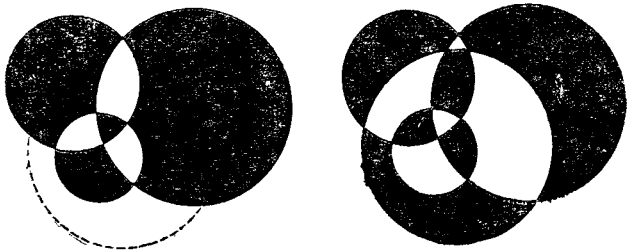
Черт. 16.

Иногда мы будем раскрашивать не только страны, но и границы карты; при этом цвета, в которые закрашены границы, мы будем обозначать цифрами 1, 2, 3, ... Если все границы, сходящиеся в одной и той же вершине, получают при такой нумерации границ разные номера, то мы будем называть соответствующую нумерацию границ карты правильной (см., например, черт. 16). Отметим, что задача о такой нумерации вершин карты, при которой «соседние» вершины, т. е. вершины, соединенные одной границей, получают разные номера, тоже связана с задачей о правильной раскраске стран карты; см. по этому поводу, например, книгу Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского, указанную на стр. 26, в которой читатель сможет также найти другие доказательства многих из приводимых ниже теорем.

Пример 14. На плоскости дано n окружностей. Доказать, что при любом расположении этих окружностей образуемую ими карту можно правильно раскрасить двумя красками.

Решение. 1°. При $n=1$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение справедливо для любой карты, образованной n окружностями, и пусть на плоскости задано $n+1$ окружностей. Удалив одну из этих

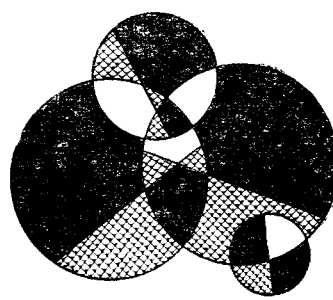


а) *б)*

Черт. 17.

окружностей, мы получим карту, которую в силу сделанного предположения можно правильно раскрасить двумя красками, например черной и белой (черт. 17, *а*). Восстановим затем отброшенную окружность и по одну сторону от нее (например, внутри) изменим цвет каждой области на противоположный (т. е. черный — на белый и наоборот); легко видеть, что при этом мы получим карту, правильно раскрашенную двумя красками (черт. 17, *б*).

Задача 13. На плоскости задано n окружностей, в каждой из которых проведено по хорде. Доказать, что образуемую ими карту можно правильно раскрасить тремя красками (черт. 18).

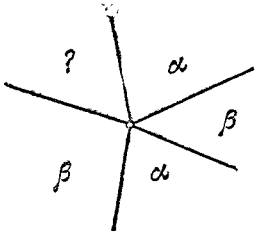


Черт. 18.

Указание. Пусть карта, образованная n окружностями с хордами, правильно раскрашена тремя красками α, β, γ.

Проведем $(n+1)$-ю окружность и цвета стран, расположенных внутри этой окружности по одну сторону от соответствующей хорды, изменим по схеме $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, $\gamma \to \alpha$, а цвета стран, расположенных внутри окружности по другую сторону от хорды, — по схеме $\alpha \to \gamma$, $\beta \to \alpha$, $\gamma \to \beta$.

Пример 15. (Теорема о двух красках.) Для того чтобы карту можно было правильно раскрасить двумя красками, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее вершине сходилось четное число границ.



Черт. 19.

Решение. Необходимость этого условия очевидна, так как если в какой-нибудь вершине карты сходится нечетное число границ, то уже страны, окружающие эту вершину, нельзя правильно раскрасить двумя красками (черт. 19).

Для доказательства достаточности условия проведем индукцию по числу границ карты.

1°. Для карты с двумя границами утверждение очевидно (черт. 20).

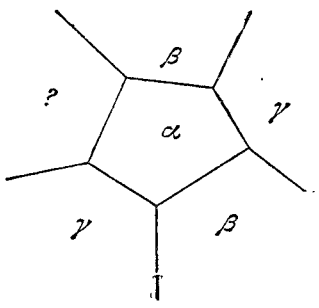
2°. Предположим, что теорема справедлива для любой карты, в каждой вершине которой сходится четное число границ и общее число границ которой не превосходит n, и пусть дана карта S, имеющая $n+1$ границ и удовлетворяющая тому же условию. Начиная с произвольной вершины A карты S, станем двигаться в произвольном направлении вдоль границ карты. Ввиду конечности числа вершин карты мы вернемся в конце концов в одну из уже пройденных вершин (карта не имеет крайних вершин, потому что на ней нет неразделяющих границ) и сможем выделить некоторый не имеющий самопересечений замкнутый контур, состоящий из границ карты. Удалив этот контур, мы получим карту S' с меньшим числом границ, в каждой вершине которой также сходится четное число границ (потому что в каждой вершине карты S отбрасывалось четное число границ — 0 или 2). В силу индуктивного предположения карту S' можно правильно раскрасить двумя красками.

Черт. 20.

Восстановив отброшенный контур и изменив все цвета с одной стороны от него (например, внутри), мы и получим правильную раскраску карты S.

Пример 16. (Теорема о трех красках.) Для того чтобы нормальная карта могла быть правильно раскрашена тремя красками, необходимо и достаточно, чтобы каждая ее страна имела четное число границ.

Доказательство. Необходимость сформулированного условия очевидна, так как если на карте имеется страна σ с нечетным числом границ, то уже σ и страны, пограничные с ней, невозможно правильно раскрасить тремя красками (черт. 21).

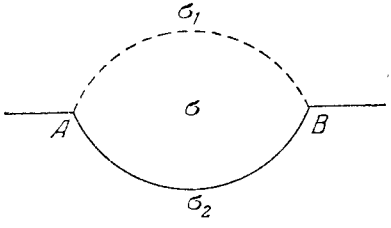


Черт. 21.

Для доказательства достаточности условия проведем индукцию по числу n стран карты.

1°. Для нормальной карты, состоящей из трех стран (см. черт. 14, *а* на стр. 29), наше утверждение очевидно. Нормальную карту, состоящую из четырех стран и изображенную на черт. 14, *б*, тоже можно, очевидно, раскрасить тремя красками (для этого достаточно закрасить «внутреннюю» страну той же краской, что и внешнюю область); нормальная карта, изображенная на черт. 14, *в*, не удовлетворяет условию о четности числа границ каждой страны. Таким образом, каждая нормальная карта, число стран которой равно 3 или 4 и каждая страна которой имеет четное число границ, может быть правильно раскрашена тремя красками.

2°. Предположим, что теорема верна для любой нормальной карты, каждая страна которой имеет четное число границ и общее число стран которой равно $n-1$ или n, и рассмотрим нормальную карту S, удовлетворяющую тому же условию и имеющую $n+1$ стран. Как вытекает из примера 13, на карте S найдется страна σ, имеющая не более пяти границ. В нашем случае σ будет иметь либо две, либо четыре границы. Рассмотрим каждый из этих случаев.

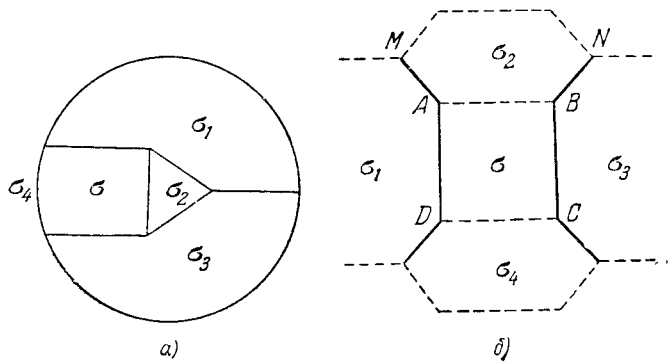


Черт. 22.

А. σ имеет две границы. Пусть A и B — вершины этой страны, σ_1 и σ_2 — соседние с ней страны (черт. 22). Удалив границу между странами σ и σ_1, мы получим карту S', которая также будет нормальной, так как точки A и B просто перестанут быть вершинами (мы условились, что карта не имеет лишних вершин), а в остальных вершинах будет сходиться

прежнее число границ. Каждая страна карты S' также имеет четное число границ, так как число границ каждой из стран σ_1 и σ_2 уменьшится на 2, а число границ каждой из остальных стран не изменится. Так как число стран карты S' равно n, то в силу индуктивного предположения ее можно правильно раскрасить тремя красками α, β, γ. Пусть страны $\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma$ и $\sigma_2' = \sigma_2$ получат при этом соответственно цвета α и β. Восстановив страну σ и закрасив ее цветом γ, мы получим правильную раскраску карты S.

Б. σ имеет четыре границы. Может случиться, что какие-либо две из прилегающих к σ с противоположных сторон стран граничат между собой или даже совпадают



Черт. 23.

(черт. 23, *а* или 14, *б*); однако в этом случае две другие граничащие с σ страны уже не могут ни иметь между собой общих границ, ни совпадать. Пусть такими будут страны σ_2 и σ_4 (черт. 23, *б*). Присоединим страны σ_2 и σ_4 к σ, удалив границы AB и CD. Мы получим карту S', которая будет также, очевидно, нормальной, причем и на этой карте каждая страна будет иметь четное число границ. Действительно, если число границ страны σ_1 было равно $2k_1$, число границ страны σ_2 равно $2k_2$, число границ страны σ_3 равно $2k_3$ и число границ страны σ_4 равно $2k_4$, то страна $\sigma' = \sigma + \sigma_2 + \sigma_4$ будет иметь $2k_2 + 2k_4 - 4$ границ, страна $\sigma_1' = \sigma_1$ будет иметь $2k_1 - 2$ границ и страна $\sigma_3' = \sigma_3$ будет иметь $2k_3 - 2$ границ, в то время как число границ каждой из остальных стран не изменится. [В том случае, когда страны σ_1 и σ_3 совпадают, эта страна на карте S' будет иметь на четыре границы меньше, чем на карте S.]

Так как карта S' имеет $n-1$ стран, то ее в силу индуктивного предположения можно правильно раскрасить тремя красками α, β, γ. Покажем, что при этом страны σ_1' и σ_3' будут закрашены в один и тот же цвет (это утверждение очевидно, если σ_3' совпадает с σ_1'). Действительно, пусть страна σ' окрашена цветом α, страна σ_1' — цветом β. Так как на участке MN к σ' прилегает нечетное число стран $(2k_2-3)$ и цвета этих стран должны, очевидно, чередоваться в последовательности γ, β, γ, β, ..., γ, то страна σ_3' будет закрашена цветом β. Восстановив страну σ и закрасив ее цветом γ, мы получим правильную раскраску карты S.

Пример 17. (Теорема о пяти красках.) Любую нормальную карту можно правильно раскрасить пятью красками.

Доказательство. 1°. Для карты, число стран которой не превосходит пяти, утверждение очевидно.

2°. Предположим, что теорема справедлива для любой нормальной карты, число стран которой равно $n-1$ или n, и рассмотрим карту S, состоящую из $n+1$ стран. Как было показано в примере 13, карта S содержит по крайней мере одну страну σ, число границ которой не превосходит пяти. Рассмотрим все случаи, которые при этом могут иметь место.

а) σ имеет две границы (см. черт. 22 на стр. 33). Пусть σ_1 и σ_2 будут соседние с σ страны. Присоединив страну σ_1 к σ, мы получим нормальную карту S', число стран которой равно n.

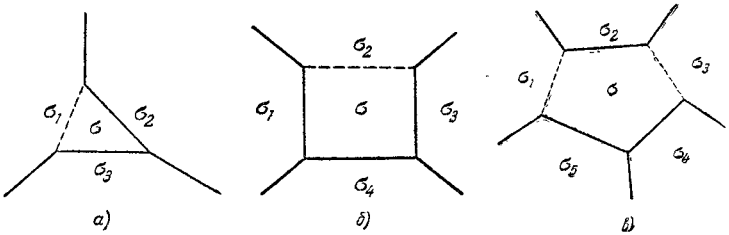
В силу индуктивного предположения карту S' можно правильно раскрасить пятью красками. Страны $\sigma_1'=\sigma+\sigma_1$ и $\sigma_2'=\sigma_2$ будут при этом окрашены какими-то двумя из этих красок. Восстановив страну σ, мы сможем закрасить ее одной из трех оставшихся красок.

б) σ имеет три границы (черт. 24, *а*). Присоединим σ_1 к σ. Закрасив полученную карту S' пятью красками, мы сможем затем закрасить страну σ одним из двух цветов, не использованных при закраске стран $\sigma_1'=\sigma+\sigma_1$, $\sigma_2'=\sigma_2$, $\sigma_3'=\sigma_3$.

в) σ имеет четыре границы (черт. 24, *б*). Найдутся две из прилегающих к σ стран, которые между собой не совпадают (см. пример 16). Присоединив к σ одну из этих стран, например σ_2, мы получим карту S' из n стран, которую в силу индуктивного предположения можно правильно раскрасить пятью красками. При этом страны $\sigma_1'=\sigma_1$, $\sigma_2'=\sigma_2+\sigma$, $\sigma_3'=\sigma_3$ и $\sigma_4'=\sigma_4$ получат какие-то четыре из пяти возможных цветов (или меньше, если σ_1' и σ_3' совпадают или

закрашены одним цветом). Восстановив страну σ, мы сможем закрасить ее в пятый цвет.

г) σ имеет пять границ (черт. 24, *в*). Как в примере 16, найдутся две соседние с σ страны, не граничащие между



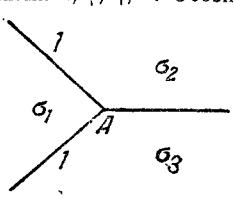
Черт. 24.

собой и не совпадающие; пусть это будут σ_1 и σ_3. Присоединив обе эти страны к σ, мы получим нормальную карту S', имеющую $n-1$ стран. В силу индуктивного предположения карту S' можно правильно раскрасить пятью красками. При этом страны $\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma + \sigma_3$, $\sigma_2' = \sigma_2$, $\sigma_4' = \sigma_4$ и $\sigma_5' = \sigma_5$ получат какие-то четыре из этих пяти цветов. Восстановив страну σ, мы сможем закрасить ее в пятый цвет.

Пример 18. (Теорема Волынского[1].) Нормальную карту в том и только в том случае можно правильно раскрасить четырьмя красками, если ее границы можно правильно занумеровать тремя цифрами.

Решение. А. Если нормальную карту можно правильно раскрасить четырьмя красками, то ее границы можно правильно занумеровать тремя цифрами.

Пусть нормальная карта S правильно раскрашена четырьмя красками α, β, γ, δ. Обозначим цифрой 1 границы между странами, закрашеиными в цвета α и β или в цвета γ и δ, цифрой 2 — границы между странами, закрашенными в цвета α и γ или в цвета β и δ, и цифрой 3 — границы между странами, закрашенными в цвета α и δ или в цвета β и γ. Полученная нумерация границ будет правильной: действительно, если в какой-либо вершине A сходятся две границы, отмеченные одной и той же цифрой (например, цифрой 1, черт. 25), то страны σ_2 и σ_3, отделяемые от страны σ_1 границами с одинаковым номером, должны были бы иметь один и тот же цвет (так, если σ_1 в нашем примере имеет цвет α, то σ_2 и σ_3 закрашеиы цветом β), но это не может иметь места, так как σ_2 и σ_3 граничат между собой.



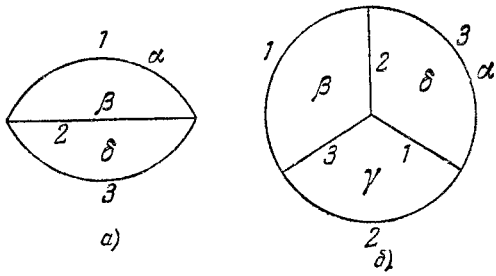
Черт. 25.

Б. Если границы нормальной карты можно правильно занумеровать тремя цифрами, то ее страны можно правильно раскрасить че-

[1]) В. В. Волынский (1923—1943), советский математик, погиб на фронте Великой Отечественной войны.

тырьмя красками. Доказательство этого утверждения мы проведем индукцией по числу n стран карты.

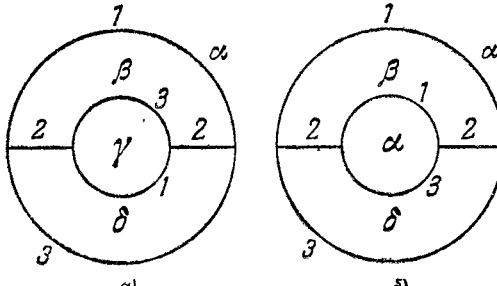
1°. Границы простейшей нормальной карты, состоящей из трех стран (см. черт. 14, *а* на стр. 29), можно единственным образом занумеровать цифрами 1, 2, 3 (с точностью до перестановки этих цифр). Раскрасим эту карту, как указано на черт. 26, *а*. При этом граница



Черт. 26.

между странами, окрашенными в цвета α и β, будет иметь номер 1, граница между странами, окрашенными в цвета β и δ,— номер 2 и граница между странами, окрашенными в цвета α и δ,— номер 3.

Правильную раскраску карты S четырьмя красками α, β, γ, δ, при которой границы между цветами α и β и между цветами γ и δ имеют номер 1, границы между цветами α и γ и между цветами β и δ — номер 2 и границы между цветами α и δ и между цветами β и γ — номер 3, мы будем называть допустимой. Мы показали, что простейшую нормальную карту, состоящую из трех стран, можно допустимым образом правильно раскрасить четырьмя красками. Покажем, что это же верно и для нормальной карты, состоящей из четырех стран (черт. 14, *б* и *в*). Границы карты, изображенной на черт. 14, *в*, можно единственным образом (с точностью до перестановки цифр)

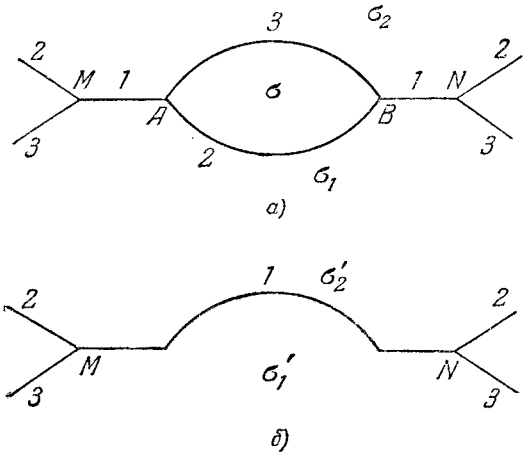


Черт. 27.

правильно занумеровать цифрами 1, 2, 3 (черт. 26, *б*). Раскраска этой карты, указанная на черт. 26, *б*, будет допустимой. Карта, изображенная на черт. 14, *б*, допускает две существенно различные нумерации границ (черт. 27, *а* и *б*). Раскраски этих карт, указанные на черт. 27, *а* и *б*, также будут допустимыми.

2°. Предположим, что всякую нормальную карту, границы которой правильно занумерованы тремя цифрами и число стран которой равно $n-1$ или n, можно допустимым образом раскрасить четырьмя красками, и рассмотрим нормальную карту S, имеющую $n+1$ стран, границы которой также правильно занумерованы тремя цифрами. Как мы видели в примере 13, на карте S найдется страна σ, число границ которой не превосходит пяти. Рассмотрим различные частные случаи, которые при этом могут иметь место.

а) σ имеет две границы. Единственная (с точностью до перестановки цифр) возможная нумерация границ в окрестности σ изображена на черт. 28, *а*. Присоединим страну σ_1 к σ; новой границе

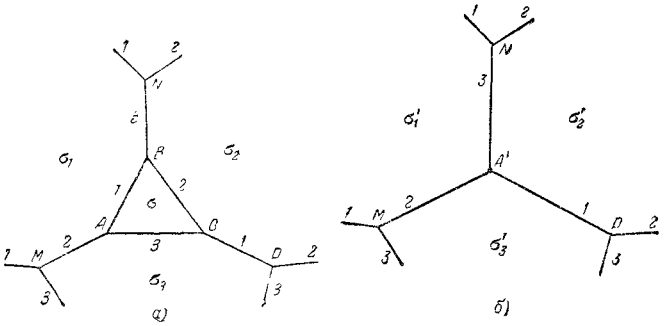


Черт. 28.

MN, разделяющей страны $\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma$ и $\sigma_2' = \sigma_2$ (черт. 28, *б*), отнесем номер 1, номера остальных границ оставим без изменения. Полученная карта S' будет нормальной; ее границы будут правильно занумерованы тремя цифрами. Так как число стран карты S' равно n, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем, если страна σ_1' имеет цвет α, то страна σ_2' будет цвета β. Восстановив страну σ и закрасив ее цветом γ, мы получим допустимую раскраску карты S четырьмя красками.

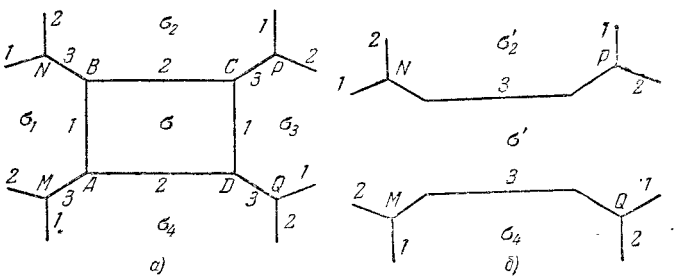
б) σ имеет три границы. Единственно возможная нумерация границ в окрестности σ указана на черт. 29, *а*. Представим себе, что карта S начерчена на резиновой пленке, и стянем страну σ в точку; при этом границы AB, BC и AC пропадут, а вершины A, B и C сольются в одну $A = B = C = A'$ (черт. 29, *б*). Не меняя нумерации границ MA', NA', PA' (бывших MA, NB, PC) и всех остальных, мы получим нормальную карту S' с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты S' равно n, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками; при этом, если страна σ_1' окрашена

цветом α, то страна σ_2' будет цвета δ и страна σ_3' — цвета γ. Восстановив страну σ и закрасив ее цветом β, мы получим допустимую раскраску карты S.



Черт. 29.

в) σ имеет четыре границы. В этом случае возможны две существенно различные нумерации границ в окрестности страны σ (черт. 30, *а* и 31, *а*). Рассмотрим первый случай (черт. 30, *а*). Найдутся две соседние с σ страны, не имеющие между собой общих границ (см. пример 16). Так как обе пары противоположных стран σ_1, σ_3 и σ_2, σ_4 в смысле нумерации границ равноправны, мы можем предположить,



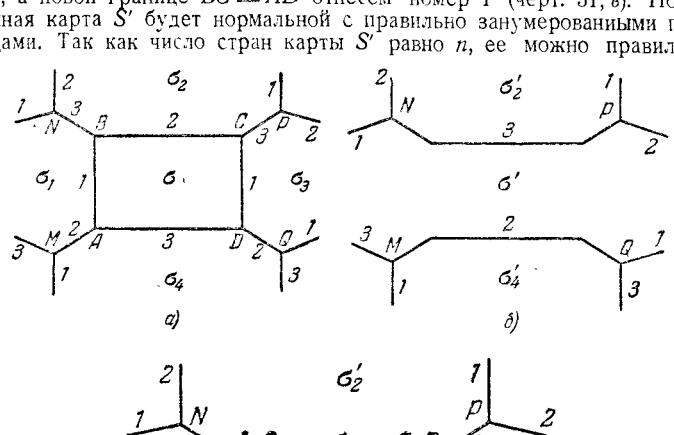
Черт. 30.

что не имеют общих границ страны σ_1 и σ_3. Присоединим к σ обе страны σ_1 и σ_3; новым границам NP и MQ отнесем номер 3 (черт. 30, *б*). Полученная карта S' будет нормальной с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты S' равно $n-1$, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем если страна $\sigma' = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma$ закрашена цветом α, то страны $\sigma_2' = \sigma_2$ и $\sigma_4' = \sigma_4$ будут цвета δ. Восстановив страну σ, мы закрасим ее цветом β.

Во втором случае (черт. 31, *а*), если не имеющими общих границ странами являются σ_1 и σ_3, то можно рассуждать аналогично; только в этом случае новая граница NP получит попрежнему номер 3, а гра-

ница MQ — номер 2 (черт. 31, *б*); страна $\sigma_4' = \sigma_4$ будет закрашена цветом γ. Восстановив страну σ, мы попрежнему закрасим ее цветом β.

Наконец, предположим, что ие имеют общих границ страны σ_2 и σ_4. Стянем четырехугольник $ABCD$ в отрезок так, чтобы точка A совпала с точкой B, а точка C — с точкой D; при этом граница BC сольется с AD. Нумерацию границ MA, NB, PC и QD оставим прежней, а новой границе $BC = AD$ отнесем номер 1 (черт. 31, *в*). Полученная карта S' будет нормальной с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты S' равно n, ее можно правильно



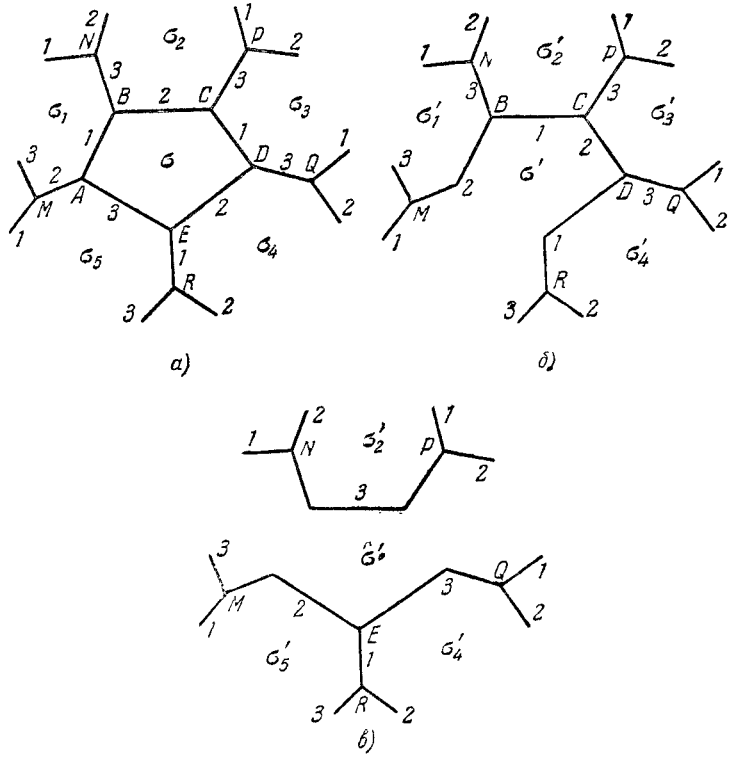
Черт. 31.

раскрасить четырьмя красками, причем если страна σ_1' имеет цвет α, то страна σ_2' будет цвета δ, страна σ_3' — цвета α и страна σ_4' — цвета γ. Восстановив страну σ, мы закрасим ее цветом β.

г) σ имеет пять границ. В этом случае, с точностью до перестановки цифр 1, 2, 3, возможен только один способ нумерации границ в окрестности страны σ (черт. 32, *а*). Рассмотрим сначала случай, когда страна σ_5 не совпадает и не имеет общих границ ни с σ_2, ни с σ_3. Присоединим страну σ_5 к σ, новой границе MB отнесем номер 2, новой границе RD — номер 1; границу BC переименуем в 1, границу CD — в 2. Мы получим нормальную карту S' (черт. 32, *б*) с правильно занумерованными границами. Так как число стран карты S' равно n, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем если страна $\sigma' = \sigma + \sigma_5$ закрашена цветом α, то страны σ_2' и σ_4' будут цвета β, а страны σ_1' и σ_3' — цвета γ. Восстановив страну σ, мы закрасим ее цветом δ.

В том случае, когда страна σ_5 граничит или совпадает с σ_2, то страны σ_1 и σ_3 не граничат между собой и не совпадают, если же

страна σ_5 совпадает или граничит с σ_5, то не могут ни совпадать, ни граничить между собой страны σ_2 и σ_4. Так как оба последних случая в смысле нумерации границ равноправны, достаточно рассмотреть случай, когда страны σ_1 и σ_3 не имеют общих границ и не совпадают. Присоединим обе эти страны к σ, новой границе NP отнесем номер 3, новой границе ME — номер 2 и новой границе EQ — номер 3. Мы получим нормальную карту S' (черт. 32, *в*) с правильно занумерованными



Черт. 32.

границами. Так как число стран карты S' равно $n-1$, ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, причем если страна $\sigma' = \sigma + \sigma_1 + \sigma_3$ закрашена цветом α, то страны $\sigma'_2 = \sigma_2$ и $\sigma'_4 = \sigma_4$ будут цвета ξ, а страна $\sigma'_5 = \sigma_5$ — цвета γ. Восстановив страну σ, мы закрасим ее цветом β.

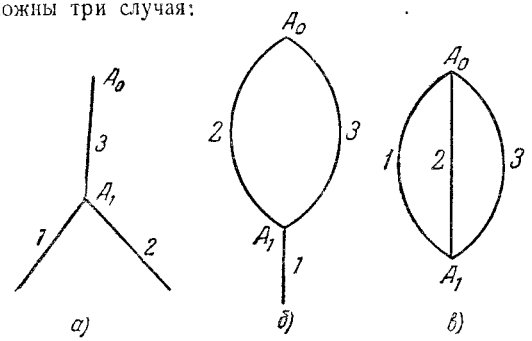
Так как не известно, всякую ли нормальную карту можно правильно раскрасить четырьмя красками, то не известно также, границы всякой ли нормальной карты можно правильно занумеровать тремя цифрами. Можно доказать лишь следующее более слабое утверждение.

Пример 19. Границы всякой нормальной карты можно правильно занумеровать четырьмя цифрами.

Доказательство. Мы докажем это утверждение для любой (даже не обязательно связной; см. выше стр. 22) карты, в каждой вершине которой сходится не более трех границ. Доказательство проведем индукцией по числу n вершин карты.

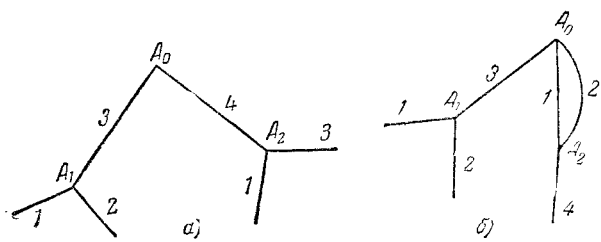
1°. При $n=2$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение справедливо для любой карты, в каждой вершине которой сходится не более трех границ и число вершин которой равно n, и рассмотрим карту S, удовлетворяющую тому же условию и имеющую $n+1$ вершин. Удалив одну из этих вершин, скажем A_0, вместе с принадлежащими ей границами, мы получим карту S', в каждой вершине которой сходится не более трех границ и число вершин которой равно n. В силу индуктивного предположения границы карты S' можно правильно занумеровать четырьмя цифрами 1, 2, 3, 4. Восстановим вершину A_0 с ее границами. При этом возможны три случая:



Черт. 33.

а) Вершина A_0 соединена (одной, двумя или тремя границами) лишь с одной вершиной A_1 карты S' (черт. 33, *а*, *б*, *в*). В этом случае нумерация границ карты S' легко продолжается в правильную нумерацию границ карты S.

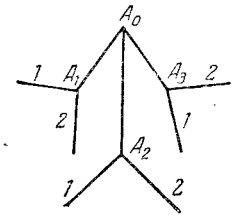


Черт. 34.

б) Вершина A_0 соединена с двумя вершинами A_1 и A_2 карты S', причем с одной из них она может быть соединена двумя границами (черт. 34, *а* и *б*). Легко проверить, что при этом во всех случаях пу-

мерация границ карты S' может быть продолжена в правильную нумерацию границ карты S.

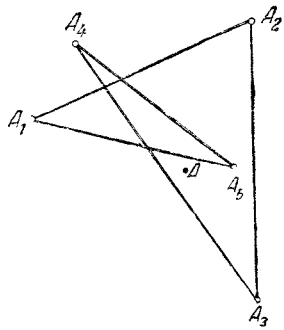
в) Вершина A_0 соединена с тремя вершинами $A_1A_2A_3$ карты S' (черт. 35). Наименее благоприятным случаем будет тот, когда через каждую из вершин A_1, A_2, A_3 карты S' проходит по две границы. Для каждой из границ A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 мы будем иметь в этом случае по два возможных номера, из которых не удастся выбрать трех различных номеров лишь в том случае, если эти три пары одинаковы, т. е. если три пары границ карты S', проходящих через вершины A_1, A_2, A_3, получили одинаковые номера, скажем 1 и 2. Выделим тогда на карте S' контур максимальной длины, начинающийся в вершине A_1 и состоящий попеременно из границ с номерами 1 и 3 (такой контур может состоять лишь из одной границы и может заканчиваться и в одной из вершин A_2 и A_3). Этот контур не может иметь самопересечений, так как, по предположению, границы карты S' занумерованы правильно. Переменим номера границ этого контура, заменяя единицу тройкой и наоборот. При этом нумерация границ карты S' останется, очевидно, правильной, причем в новой нумерации три пары границ, проходящих через вершины A_1, A_2 и A_3 карты S', уже не будут занумерованы одинаково; а в этом случае правильная нумерация границ карты S' легко может быть продолжена в правильную нумерацию границ карты S.



Черт. 35.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ПО ИНДУКЦИИ

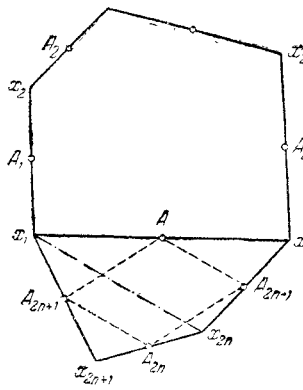
Применение метода математической индукции к решению задач на построение может иметь место в том случае, если в условии задачи фигурирует некоторое целое положительное число n (например, в задачах на построение n-угольников). Ниже мы рассмотрим ряд примеров такого рода. При этом в настоящем параграфе мы будем рассматривать и самопересекающиеся многоугольники (черт. 36); другими словами, под многоугольником в большинстве задач понимается какая угодно замкнутая ломаная $A_1A_2 \ldots A_n$.



Черт. 36.

Пример 20. На плоскости даны $2n+1$ точек. Построить $(2n+1)$-угольник, для которого эти точки являются серединами сторон.

Решение. 1°. При $n=1$ задача сводится к построению треугольника по заданным серединам его сторон и решается легко (достаточно провести через каждую из трех заданных точек прямую, параллельную прямой, соединяющей две другие точки).



Черт. 37.

2°. Предположим, что мы умеем строить $(2n-1)$-угольник по заданным серединам его сторон, и пусть даны $2n+1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$, являющихся серединами сторон искомого $(2n+1)$-угольника $x_1x_2\ldots x_{2n+1}$.

Рассмотрим четырехугольник $x_1x_{2n-1}x_{2n}x_{2n+1}$ (черт. 37). Точки A_{2n-1}, A_{2n}, A_{2n+1} служат серединами трех его сторон $x_{2n-1}x_{2n}$, $x_{2n}x_{2n+1}$, $x_{2n+1}x_1$. Пусть A — середина четвертой стороны x_1x_{2n-1}. Четырехугольник $A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A$ — параллелограмм (для доказательства достаточно провести прямую x_1x_{2n} и рассмотреть треугольники $x_1x_{2n+1}x_{2n}$ и $x_1x_{2n-1}x_{2n}$, для которых отрезки $A_{2n}A_{2n+1}$ и $A_{2n-1}A$ служат средними линиями); так как точки A_{2n-1}, A_{2n} и A_{2n+1} нам известны, то четвертая вершина A параллелограмма легко может быть построена. Точки A_1, $A_2, \ldots, A_{2n-2}$, A являются серединами сторон $(2n-1)$-угольника $x_1x_2\ldots x_{2n-1}$, который согласно сделанному предположению мы можем построить. Далее, остается только построить отрезки x_1x_{2n+1} и $x_{2n-1}x_{2n}$ (точки x_1 и x_{2n-1} уже определены), делящиеся пополам в известных точках A_{2n+1} и A_{2n-1}.

В случае многоугольника, не имеющего самопересечений, ясно, что понимать под внешними и внутренними (по отношению к этому многоугольнику) точками. В общем случае это понятие теряет смысл; так, например, нельзя сказать, расположена ли точка A на черт. 36 внутри или вне многоугольника. Вместо этого мы введем следующее определение. Пусть дан произвольный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Установим для этого многоугольника определенное *направление обхода* его вершин (скажем, в порядке $A_1, A_2, \ldots, A_k$). Пусть на одной из сторон, например A_1A_2, многоугольника построен

треугольник A_1BA_2. Если направление обхода вершин треугольника в порядке A_1, A_2, B противоположно направлению обхода вершин многоугольника (одно — по, а другое — против часовой стрелки), то мы будем говорить, что треугольник обращен во внешнюю сторону по отношению к многоугольнику; если же направления обхода вершин треугольника и многоугольника совпадают,— будем говорить, что он обращен во внутреннюю сторону по отношению к многоугольнику.

Пример 21. На плоскости даны n точек. Построить n-угольник, стороны которого являются основаниями равнобедренных треугольников с вершинами в данных n точках и углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ при вершинах [1]).

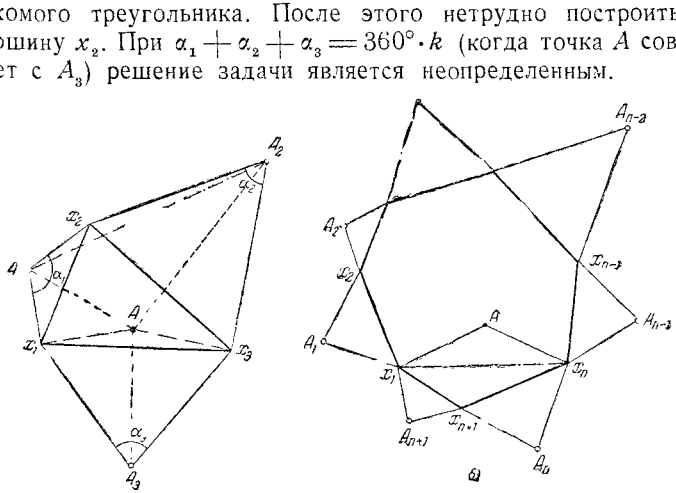
Решение. Мы будем считать, что некоторые из углов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могут быть и больше 180°, условившись, что при $\alpha < 180°$ соответствующий равнобедренный треугольник обращен во внешнюю сторону по отношению к многоугольнику, а при $\alpha > 180°$ — во внутреннюю сторону (причем угол при вершине в этом случае равен $360° - \alpha$).

1°. Пусть $n = 3$. Допустим, что задача решена, x_1, x_2, x_3 — вершины искомого треугольника, A_1, A_2, A_3 — заданные вершины построенных на его сторонах равнобедренных треугольников с углами α_1, α_2, α_3 при вершинах (черт. 38, *а*). При повороте плоскости вокруг точки A_1 на угол α_1 (мы условимся считать, что все повороты производятся против часовой стрелки) вершина x_1 перейдет в x_2, при повороте вокруг точки A_2 на угол α_2 вершина x_2 перейдет в x_3. Оба эти поворота, последовательно выполненные один за другим, равносильны одному повороту на угол $\alpha_1 + \alpha_2$ вокруг некоторой точки A, которую можно построить по точкам A_1 и A_2 и углам α_1 и α_2 следующим образом: на отрезке A_1A_2 при точках A_1 и A_2 строим углы $\frac{\alpha_1}{2}$ и $\frac{\alpha_2}{2}$; точка A пересечения вторых сторон этих углов и будет центром результирующего поворота на угол $\alpha_1 + \alpha_2$ [см., например, И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I, § 2 гл. I части первой, М., Гостехиздат, 1955 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 7)]. При этом результирующем повороте вершина x_1 переходит в x_3. Следовательно, вершина x_3 переходит в x_1 при повороте вокруг точки A на угол $360° - (\alpha_1 + \alpha_2)$ и,

[1]) Предыдущий пример можно считать частным случаем примера 21 при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 180°$.

значит, точка A является вершиной равнобедренного треугольника с основанием x_1x_3 и углом $360° - (\alpha_1 + \alpha_2)$ при вершине.

По точкам A и A_3, если они не совпадают (что может иметь место, лишь если $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360° \cdot k$), можно построить сторону x_1x_3. Для этого на отрезке AA_3 по обе стороны от точек A и A_3 строим соответственно углы $\frac{360° - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$ и $\frac{\alpha_3}{2}$. Точки пересечения сторон этих углов и будут вершинами x_1 и x_3 искомого треугольника. После этого нетрудно построить и вершину x_2. При $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360° \cdot k$ (когда точка A совпадает с A_3) решение задачи является неопределенным.



Черт. 38.

2°. Предположим, что мы умеем строить n-угольник по вершинам построенных на его сторонах равнобедренных треугольников с заданными углами при вершинах, и пусть требуется построить $(n+1)$-угольник по вершинам A_1, A_2, ... A_n, A_{n+1} построенных на его сторонах равнобедренных треугольников с углами α_1, α_2, ..., α_n, α_{n+1} при вершинах.

Пусть $x_1x_2 \ldots x_nx_{n+1}$ — искомый $(n+1)$-угольник (черт. 38, *б*). Рассмотрим треугольник $x_1x_nx_{n+1}$. Как в п. 1°, по известным вершинам A_n и A_{n+1} равнобедренных треугольников $x_nA_nx_{n+1}$ и $x_{n+1}A_{n+1}x_1$, построенных на сторонах x_nx_{n+1} и $x_{n+1}x_1$, можно найти вершину A равнобедренного треугольника x_1Ax_n, построенного на диагонали x_1x_n и имеющего угол при вершине, равный $360° - (\alpha_n + \alpha_{n+1})$. Этим наша задача сводится к задаче о построении n-угольника $x_1x_2 \ldots x_n$ по вершинам $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A$ построенных на его

сторонах равнобедренных треугольников с известными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, $360° - (\alpha_n + \alpha_{n+1})$ при вершинах. В силу индуктивного предположения n-угольник $x_1x_2 \ldots x_n$ может быть построен, после чего уже нетрудно построить и искомый $(n+1)$-угольник $x_1x_2 \ldots x_nx_{n+1}$.

При $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 360° \cdot k$ решение задачи является невозможным или неопределенным (почему?).

Задача 14. На плоскости дано n точек. Построить n-угольник, для которого эти точки являются вершинами построенных на его сторонах треугольников, имеющих заданные углы при вершинах и заданные отношения боковых сторон.

Указание. Задача может быть решена аналогично предыдущей задаче (представляющей собой ее частный случай), только вместо поворота вокруг заданной точки A_1 на известный угол α_1 здесь следует рассматривать преобразование подобия, состоящее из поворота на угол α_1 и центрально-подобного преобразования (гомотетии) с тем же центром A_1 и коэффициентом подобия, равным отношению сторон соответствующего треугольника (и аналогично для других заданных точек). Последовательное выполнение двух таких преобразований равносильно некоторому третьему преобразованию того же типа (см., например, § 2 гл. I части второй указанной выше книги И. М. Яглома). Следовательно, в обозначениях, аналогичных принятым в решении предыдущего примера, по вершинам A_1 и A_2 треугольников $x_1x_2A_1$ и $x_2x_3A_2$ можно найти вершину A треугольника x_1x_3A, построенного на отрезке x_1x_3 и имеющего известный угол при вершине и известное отношение боковых сторон.

Построение стороны x_1x_3 треугольника $x_1x_2x_3$ по точкам A и A_3 можно выполнить, например, следующим образом. Последовательность двух известных преобразований подобия с центрами A и A_3 переводит x_1 в себя (сначала x_1 переходит в x_3, затем x_3 — в x_1). Но последовательность этих преобразований равносильна одному преобразованию подобия с центром в некоторой точке B, которую можно построить. Так как точка B переходит в себя, то она совпадает с искомой точкой x_1. Если сумма заданных углов при вершинах кратна 360°, а произведение отношений сторон равно единице, то решение задачи невозможно или неопределенно.

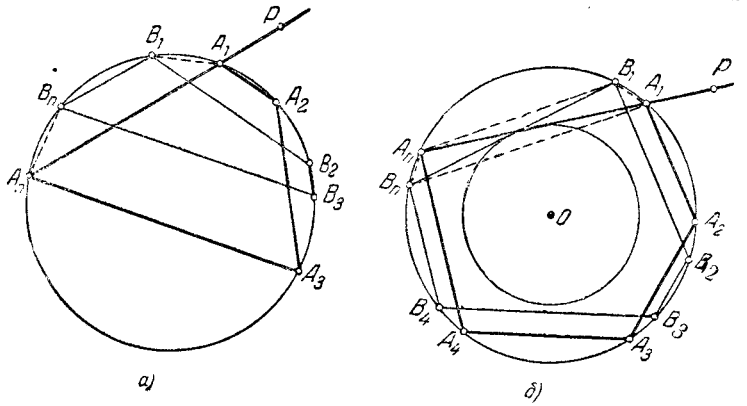
Пример 22. На плоскости даны окружность и n точек. Вписать в окружность n-угольник, стороны которого проходят через заданные точки.

Решение. Эта задача — трудная; для ее решения надо применить метод математической индукции совсем неожиданным образом. А именно, здесь не удается воспользоваться индукцией по числу n сторон многоугольника; вместо этого приходится рассматривать более общую задачу о построении n-угольника, k соседних сторон которого проходят через k заданных точек, а остальные $n-k$ сторон параллельны заданным прямым (эта задача переходит в рассматри-

ваемую при $k=n$), и проводить индукцию по числу k.

1°. При $k=1$ имеем такую задачу: вписать в окружность n-угольник, сторона A_1A_n которого проходит через заданную точку P, а остальные $n-1$ сторон A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ параллельны заданным прямым l_1, l_2, ..., l_{n-1}.

Допустим, что задача решена и искомый многоугольник построен (черт. 39, *а*, *б*). Возьмем на окружности произвольную точку B_1 и построим вписанный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$, стороны B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ которого параллельны соответственно прямым l_1, l_2, ..., l_{n-1}. Тогда дуги A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n будут равны между собой, причем дуги A_1B_1 и A_2B_2, A_2B_2 и A_3B_3 и т. д. будут иметь противоположные направления на окружности. Следовательно, при четном n дуги A_1B_1 и A_nB_n направлены в противоположные стороны, и четырехугольник $A_1B_1B_nA_n$ является равнобедренной трапецией с основаниями A_1A_n и B_1B_n (черт. 39, *а*). Поэтому сторона A_1A_n искомого многоугольника параллельна стороне B_1B_n



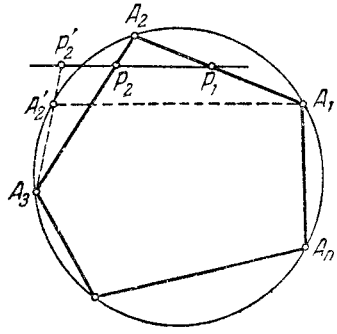
Черт. 39.

n-угольника $B_1B_2\ldots B_n$; следовательно, в этом случае через точку P надо провести прямую, параллельную B_1B_n, после чего уже без труда определяются и остальные вершины n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ (провести исследование).

При нечетном n дуги A_1B_1 и A_nB_n имеют одинаковые направления и четырехугольник $A_1B_1A_nB_n$ является равнобедренной трапецией с основаниями A_1B_n и B_1A_n (черт. 39, *б*). Так как диагонали A_1A_n и B_1B_n трапеции равны, то в этом случае нужно провести через точку P прямую, на которой заданная

окружность отсекает хорду A_1A_n, равную известной хорде B_1B_n, т. е. прямую, касательную к окружности, концентрической с заданной и касающейся B_1B_n (исследование!).

2°. Предположим, что мы уже умеем решать задачу о построении вписанного в окружность n-угольника, k последовательных сторон которого проходят через k заданных точек, а остальные $n-k$ сторон параллельны заданным прямым, и пусть требуется вписать в окружность n-угольник, у которого $k+1$ соседних сторон A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{k+1}A_{k+2}$ проходят через $k+1$ заданных точек P_1, P_2, ..., P_{k+1}, а остальные $n-k-1$ сторон параллельны заданным прямым.



Черт. 40.

Допустим, что задача решена и искомый n-угольник построен (черт. 40). Рассмотрим стороны A_1A_2 и A_2A_3 этого многоугольника. Проведем через вершину A_1 прямую A_1A_2', параллельную P_1P_2, обозначим через A_2' точку пересечения этой прямой с окружностью и через P_2' — точку пересечения прямой $A_2'A_2$ с P_1P_2. Треугольники $P_1A_2P_2$ и $P_2'P_2A_3$ подобны, так как $\angle A_2P_1P_2 = \angle A_2A_1A_2' = \angle A_2A_3P_2'$ и $\angle A_2P_2P_1 = \angle P_2'P_2A_3$. Следовательно, $\frac{P_1P_2}{A_3P_2} = \frac{A_2P_2}{P_2'P_2}$, откуда

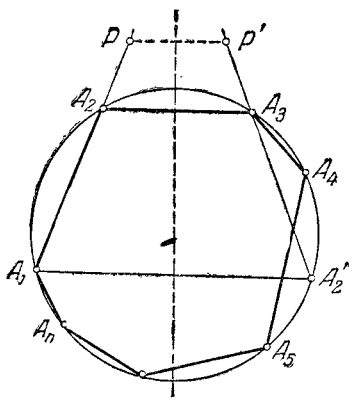
$$P_2'P_2 = \frac{A_3P_2 \cdot A_2P_2}{P_1P_2}.$$

Так как произведение $A_3P_2 \cdot A_2P_2$ зависит лишь от данной точки P_2 и от окружности (но не от выбора точек A_2 и A_3!), то оно может быть определено; поэтому величина отрезка $P_2'P_2$ может быть найдена и, следовательно, точка P_2' может быть построена. Таким образом, нам известны k точек $P_2', P_3, \ldots, P_{k+1}$, через которые проходят k соседних сторон $A_2'A_3$, A_3A_4, ..., $A_{k+1}A_{k+2}$ n-угольника $A_1A_2'A_3 \ldots A_n$, остальные же $n-k$ сторон его $A_{k+2}A_{k+3}$, ..., A_nA_1, A_1A_2' параллельны известным прямым. В силу индуктивного предположения мы можем построить n-угольник $A_1A_2'A_3 \ldots A_n$, после чего уже нетрудно построить и искомый n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$.

Задача 15. В заданную окружность вписать n-угольник, k сторон которого (не обязательно соседних!) проходят

через k заданных точек, а остальные $n - k$ сторон параллельны заданным прямым.

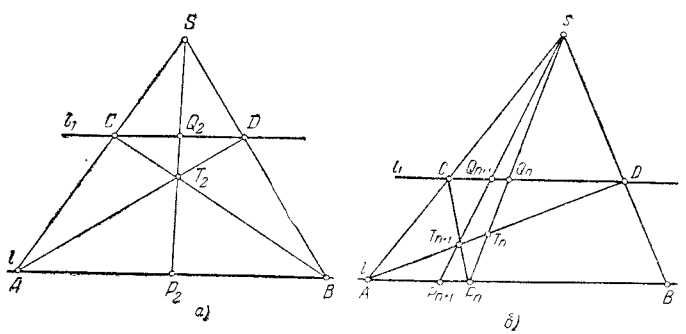
Указание. Пусть сторона A_1A_3 искомого многоугольника проходит через точку P, а сторона A_2A_3 параллельна прямой l (черт. 41). Обозначим через P' точку, симметричную с точкой P относительно диаметра окружности, перпендикулярного к прямой l, и через A_2' — точку пересечения прямой $P'A_3$ с окружностью. В n-угольнике $A_1A_2'A_3 \ldots A_n$ сторона A_1A_2' параллельна заданной прямой l, а сторона $A_2'A_3$ проходит через известную точку P'. Выполнив такое построение соответствующее число раз, мы сведем эту задачу к построению n-угольника, у которого k соседних сторон проходят через известные точки, а остальные $n - k$ сторон параллельны заданным прямым.



Черт. 41.

Пример 23. Даны две параллельные прямые l и l_1. С помощью одной линейки разделить отрезок AB прямой l на n равных частей.

Решение. 1°. Пусть $n = 2$. Произвольную точку S плоскости, не лежащую на прямых l и l_1, соединим с точками



Черт. 42.

A и B (черт. 42, $а$) и обозначим через C и D точки пересечения прямых AS и BS с прямой l_1. Точку пересечения прямых AD и BC обозначим через T_2, точку пересечения пря-

мых ST_2 и l — через P_2. Докажем, что точка P_2 — искомая, т. е. что $AP_2 = \frac{1}{2} AB$.

Обозначим через Q_2 точку пересечения прямых ST_2 и l_1. Легко видеть, что

$$\triangle T_2P_2B \backsim \triangle T_2Q_2C, \quad \triangle ABT_2 \backsim \triangle DCT_2,$$
$$\triangle SAP_2 \backsim \triangle SCQ_2 \text{ и } \triangle SAB \backsim \triangle SCD,$$

откуда

$$\frac{P_2B}{Q_2C} = \frac{T_2B}{T_2C} = \frac{AB}{CD} \quad \text{и} \quad \frac{P_2A}{Q_2C} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_2B}{Q_2C} = \frac{P_2A}{Q_2C},$$

а поэтому $P_2A = P_2B$ и $AP_2 = \frac{1}{2} AB$.

2°. Предположим, что мы уже умеем, пользуясь одной линейкой, строить такую точку P_n отрезка AB, что $AP_n = \frac{1}{n} AB$. Выберем вне l и l_1 произвольную точку S, и обозначим через T_n и Q_n точки пересечения прямой SP_n соответственно с AD и l_1 (черт. 42, *б*). Точку T_{n+1} пересечения прямых AD и CP_n соединим с S и обозначим точки пересечения ST_{n+1} с прямыми l_1 и l через Q_{n+1} и P_{n+1}.

Докажем, что P_{n+1} — искомая точка, т. е. что $AP_{n+1} = \frac{1}{n+1} AB$.

Действительно, из подобия треугольников $CQ_{n+1}T_{n+1}$ и $P_nP_{n+1}T_{n+1}$, $CT_{n+1}D$ и $P_nT_{n+1}A$ имеем:

$$\frac{P_{n+1}P_n}{CQ_{n+1}} = \frac{P_nT_{n+1}}{CT_{n+1}} = \frac{AP_n}{CD}; \tag{11}$$

из подобия треугольников SAP_{n+1} и SCQ_{n+1}, SAB и SCD имеем:

$$\frac{AP_{n+1}}{CQ_{n+1}} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}. \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) следует $\frac{P_{n+1}P_n}{AP_{n+1}} = \frac{AP_n}{AB}$ или, так как $P_{n+1}P_n = AP_n - AP_{n+1}$ и $AP_n = \frac{1}{n} AB$,

$$\frac{\frac{1}{n}AB - AP_{n+1}}{AP_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n}AB}{AB}, \quad \frac{1}{n}AB - AP_{n+1} = \frac{1}{n}AP_{n+1},$$

откуда окончательно

$$AP_{n+1}=\frac{1}{n+1}AB.$$

Для того чтобы найти последующие точки P'_{n+1}, P''_{n+1}, ... деления, достаточно тем же приемом построить отрезки $P_{n+1}P'_{n+1}=\frac{1}{n}P_{n+1}B$, $P'_{n+1}P''_{n+1}=\frac{1}{n-1}P'B$ и т. д.

Задача 16. Пользуясь циркулем данного раствора a и линейкой, построить отрезок, равный a/n.

Указание. На окружности радиуса a отметим точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, являющиеся вершинами правильного шестиугольника. Предположим, что нам уже известна точка B_n радиуса OA_n такая, что $OB_n=\frac{1}{n}OA_n=\frac{a}{n}$ (здесь считается $A_{6m+k}=A_k$ при любом m и $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$; $B_1=A_1$), и обозначим через B_{n+1} точку пересечения прямых OA_{n+1} и B_nA_{n+2}; тогда $OB_{n+1}=\frac{a}{n+1}$.

§ 4. НАХОЖДЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ПО ИНДУКЦИИ

Рассмотрим несколько задач на нахождение геометрических мест с помощью метода математической индукции.

Пример 24. На сторонах выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ отложены отрезки B_1C_1, B_2C_2, ..., B_nC_n. Найти геометрическое место внутренних точек M этого многоугольника, для которых сумма площадей треугольников MB_1C_1, MB_2C_2, ..., MB_nC_n постоянна (равна сумме $S_{\triangle M_0B_1C_1}+S_{\triangle M_0B_2C_2}+\ldots+S_{\triangle M_0B_nC_n}$, где M_0 — определенная точка внутри многоугольника).

Решение. 1°. Пусть $n=3$ (черт. 43а). На сторонах A_3A_2 и A_3A_1 треугольника $A_1A_2A_3$ отложим отрезки $A_3P=B_2C_2$ и $A_3Q=B_3C_3$. Тогда [1])

$$S_{\triangle M_0B_2C_2}+S_{\triangle M_0B_3C_3}=S_{\triangle M_0PA_3}+S_{\triangle M_0QA_3}=S_{\triangle PQA_3}+S_{\triangle M_0PQ}$$

и, следовательно,

$$S_{\triangle M_0B_1C_1}+S_{\triangle M_0B_2C_2}+S_{\triangle M_0B_3C_3}=S_{\triangle PQA_3}+(S_{\triangle M_0B_1C_1}+S_{\triangle M_0PQ}).$$

Аналогично

$$S_{\triangle MB_1C_1}+S_{\triangle MB_2C_2}+S_{\triangle MB_3C_3}=S_{\triangle PQA_3}+(S_{\triangle MB_1C_1}+S_{\triangle MPQ}).$$

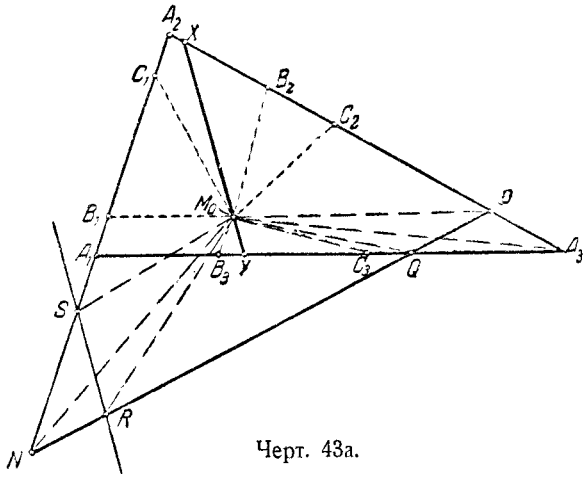
Мы видим, что искомое геометрическое место определяется

[1]) Здесь мы считаем, что точка M_0 лежит внутри четырехугольника A_1A_2PQ; рассуждение мало изменилось бы и в ином случае.

условием

$$S_{\triangle MB_1C_1} + S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0PQ}.$$

Пусть теперь N — точка пересечения прямых A_1A_2 и PQ (если эти прямые параллельны, искомое геометрическое место



Черт. 43а.

будет, очевидно, отрезком параллельной им прямой). Отложим на сторонах угла A_2NP отрезки $NR = PQ$ и $NS = B_1C_1$; тогда

$$S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0PQ} = S_{\triangle M_0NS} + S_{\triangle M_0NR} = S_{\triangle NRS} + S_{\triangle M_0RS}$$

и аналогично

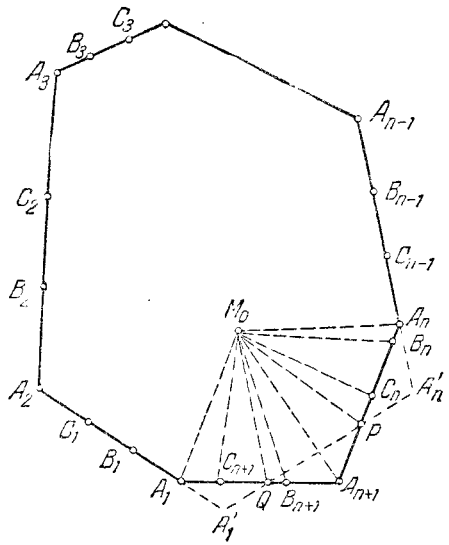
$$S_{\triangle MB_1C_1} + S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle NRS} + S_{\triangle MRS}.$$

Следовательно, искомое геометрическое место состоит из тех точек M, лежащих внутри треугольника, для которых $S_{\triangle MRS} = S_{\triangle M_0RS}$, т. е. представляет собой отрезок XY прямой, проходящей через точку M_0 (и параллельной прямой RS[1]).

2°. Пусть мы уже знаем, что для n-угольника искомое геометрическое место представляет собой отрезок прямой (проходящей, разумеется, через точку M_0). Рассмотрим теперь

[1]) Индукцию можно было бы начинать со случая $n = 2$, когда «n-угольник» представляет собой угол, имеющий лишь две стороны.

$(n+1)$-угольник $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$; пусть B_1C_1, B_2C_2, $\ldots$, B_nC_n, $B_{n+1}C_{n+1}$ — заданные отрезки, отложенные на его сторонах, и M_0 — точка внутри $(n+1)$-угольника (черт. 43б). На сто-



Черт. 43б.

ронах угла $A_1A_{n+1}A_n$ от вершины A_{n+1} отложим отрезки $A_{n+1}P = B_nC_n$ и $A_{n+1}Q = B_{n+1}C_{n+1}$. Тогда

$$S_{\triangle MB_nC_n} + S_{\triangle MB_{n+1}C_{n+1}} = S_{\triangle MA_{n+1}P} + S_{\triangle MA_{n+1}Q} = \\ = S_{\triangle A_{n+1}PQ} + S_{\triangle MPQ}.$$

Следовательно, для точек M искомого геометрического места

$$S_{\triangle MB_1C_1} + S_{\triangle MB_2C_2} + \ldots + S_{\triangle MB_{n-1}C_{n-1}} + S_{\triangle MPQ} = \\ = S_{\triangle M_0B_1C_1} + S_{\triangle M_0B_2C_2} + \ldots + S_{\triangle M_0B_{n-1}C_{n-1}} + S_{\triangle M_0PQ}.$$

В силу индуктивного предположения искомое геометрическое место представляет собой отрезок прямой, проходящей через точку M_0.

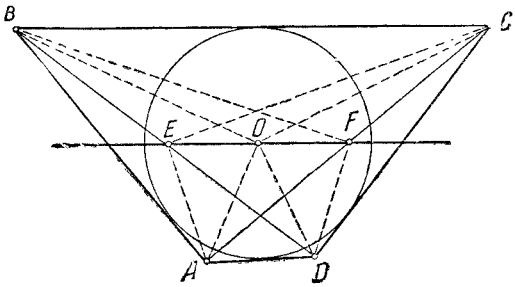
Из решения задачи нетрудно усмотреть также метод построения этого геометрического места.

Задача 17. Даны n прямых l_1, l_2, $\ldots$, l_n, на каждой из которых задано по отрезку B_1C_1, B_2C_2, $\ldots$, B_nC_n и точка M_0. Найти геометрическое место точек M, для которых алгебраическая сумма площадей треугольников MB_1C_1, MB_2C_2, $\ldots$, MB_nC_n,

где площадь треугольника MB_iC_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) берется со знаком плюс, если точка M лежит с той же стороны от прямой l_i, что и точка M_0, и со знаком минус — в противном случае, равна соответствующей сумме для точки M_0.

Указание. Искомым геометрическим местом является прямая линия; доказательство аналогично решению примера 24.

Задача 18. Доказать, что в четырехугольнике, который



Черт. 44.

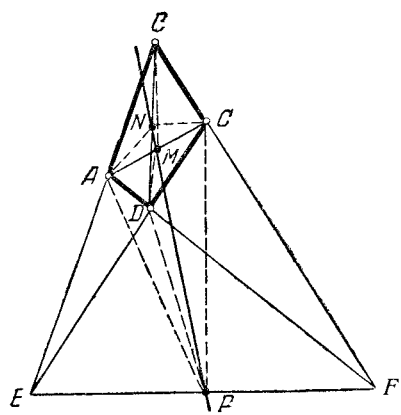
можно описать около круга, середины диагоналей лежат на одной прямой с центром круга (черт. 44).

Указание. В обозначениях черт. 44 имеем:

$$S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ADE} = S_{\triangle BCF} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BCO} + S_{\triangle ADO} = \frac{1}{2} S,$$

где S — площадь четырехугольника. Отсюда в силу результата примера 24 (или задачи 17) следует, что точки E, F и O лежат на одной прямой.

Задача 19. Доказать, что прямая, соединяющая середины диагоналей выпуклого четырехугольника (не параллелограмма и не трапеции), делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон (черт. 45).



Черт. 45.

Указание. В обозначениях черт. 45 (где P—середина отрезка EF) имеем:

$$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CDM} = S_{\triangle ABN} + S_{\triangle CDN} = S_{\triangle ABP} - S_{\triangle CDP} = \frac{1}{2} S,$$

где S — площадь четырехугольника. Отсюда в силу результата задачи 17 следует, что точки M, N и P лежат на одной прямой.

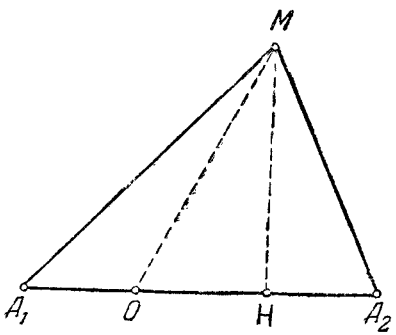
Пример 25. Даны n точек A_1, A_2, ..., A_n и n (положительных или отрицательных!) чисел a_1, a_2, ..., a_n. Найти геометрическое место точек M, для которых сумма

$$a_1 \cdot MA_1^2 + a_2 \cdot MA_2^2 + \ldots + a_n MA_n^2$$

постоянна.

Решение. 1°. Пусть $n = 2$. Для определенности будем сначала предполагать, что оба числа a_1 и a_2 положительны.

Возьмем на отрезке A_1A_2 точку O, делящую его в отношении $a_2 : a_1$, т. е. такую точку O, что $OA_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} A_1A_2$



Черт. 46.

и $OA_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} A_1A_2$. Пусть M — произвольная точка плоскости и H — основание перпендикуляра, опущенного из M на прямую A_1A_2 (черт. 46). Тогда имеем:

$$MA_1^2 = MO^2 + A_1O^2 \pm 2A_1O \cdot HO,$$
$$MA_2^2 = MO^2 + A_2O^2 \mp 2A_2O \cdot HO.$$

Умножая первое из этих равенств на A_2O, второе — на A_1O и складывая их почленно, получим:

$$MA_1^2 \cdot A_2O + MA_2^2 \cdot A_1O =$$
$$= MO^2 (A_2O + A_1O) + A_1O^2 \cdot A_2O + A_2O^2 \cdot A_1O =$$
$$= MO^2 \cdot A_1A_2 + A_1O \cdot A_2O \cdot A_1A_2.$$

Подставим теперь вместо A_1O и A_2O их значения; получим:

$$MA_1^2 \frac{a_1 \cdot A_1A_2}{a_1 + a_2} + MA_2^2 \frac{a_2 \cdot A_1A_2}{a_1 + a_2} = MO^2 \cdot A_1A_2 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{a_2}{a_1 + a_2} A_1A_2^3,$$

или

$$a_1MA_1^2 + a_2MA_2^2 = (a_1 + a_2)\,MO^2 + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} A_1A_2^2.$$

Следовательно, если

$$a_1MA_1^2 + a_2MA_2^2 = R^2,$$

то

$$MO^2 = \frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} A_1A_2^2 = \text{const}.$$

Отсюда вытекает, что если $\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} A_1A_2^2 > 0$, то искомым геометрическим местом будет окружность с центром в точке O радиуса $\sqrt{\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} A_1A_2^2}$; если $\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} A_1A_2^2 = 0$, то искомое геометрическое место состоит из единственной точки O; наконец, если $\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} A_1A_2^2 < 0$, то это геометрическое место не содержит ни одной точки.

Случай, когда a_1 и a_2 оба отрицательны, очевидным образом сводится к предыдущему. В случае, когда $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ и $a_1 + a_2 \neq 0$ (например, $a_1 + a_2 > 0$), точку O следует выбрать на продолжении отрезка A_1A_2 правее точки A_2 так, чтобы было $A_2O = \left|\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right|$ и $A_1O = \left|\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right|$; дальнейшие рассуждения не будут отличаться от вышеизложенных. Наконец, если $a_1 + a_2 = 0$, то $a_1 = -a_2$ и наша задача сводится к следующей: найти геометрическое место точек M, для которых разность квадратов расстояний от двух заданных точек A_1 и A_2 постоянна. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую A_1A_2 (черт. 46), тогда $MA_1^2 = MH^2 + A_1H^2$, $MA_2^2 = MH^2 + A_2H^2$ и, следовательно, $MA_1^2 - MA_2^2 = A_1H^2 - A_2H^2$. Если $MA_1^2 - MA_2^2 = R^2$, то $A_1H - A_2H = \frac{R^2}{A_1A_2}$, чем полностью определяется точка H; отсюда следует, что искомым геометрическим местом будет в этом случае прямая, проходящая через точку H и перпендикулярная к A_1A_2.

2°. Предположим, что мы уже доказали, что при n заданных точках соответствующее геометрическое место представляет собой окружность, если $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, и

прямую, если $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$. Рассмотрим теперь $n+1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ и $n+1$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Предположим, что $a_n+a_{n+1}\neq 0$ (если бы было $a_n+a_{n+1}=0$, то мы заменили бы эту пару чисел числами a_{n-1} и a_{n+1} или числами a_{n-1} и a_n; если одновременно $a_n+a_{n+1}=0$, $a_{n-1}+a_{n+1}=0$ и $a_{n-1}+a_n=0$, то $a_{n-1}=a_n=a_{n+1}=0$, и мы можем непосредственно воспользоваться индуктивным предположением, так как при этом задача сводится к случаю $n-2$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ и $n-2$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$).

Как в п. 1°, покажем, что на отрезке A_nA_{n+1} можно найти такую точку O, что для любой точки M плоскости

$$a_nMA_n^2+a_{n+1}MA_{n+1}^2=(a_n+a_{n+1})\,MO^2+\frac{a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}A_nA_{n+1}^2.$$

Тем самым наша задача сведется к нахождению геометрического места точек M, для которых постоянна сумма

$$a_1MA_1^2+a_2MA_2^2+\ldots+a_{n-1}MA_{n-1}^2+(a_n+a_{n+1})\,MO^2.$$

В силу индуктивного предположения это геометрическое место будет окружностью при $a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}\neq 0$ и прямой при $a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}=0$.

Задача 20. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от n заданных точек постоянна.

Указание. Достаточно в условии примера 25 положить $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

Задача 21. Найти точку, сумма квадратов расстояний которой от n заданных точек минимальна.

Указание. Центр окружности, которая является искомым геометрическим местом в задаче 20.

Задача 22. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух заданных точек постоянно.

Указание. Если M — точка искомого геометрического места, то $\frac{AM}{BM}=c$ и, следовательно, $AM^2-c\cdot BM^2=0$; поэтому настоящая задача сводится к примеру 25.

Задача 23. Дан n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Найти геометрическое место таких точек M, что многоугольник, вершинами которого являются проекции точки M на стороны заданного многоугольника, имеет данную площадь S.

Указание. Можно показать, что площадь треугольника, вершинами которого являются проекции точки M на стороны треугольника $A_1A_2A_3$, равна $\frac{1}{4}\left|1-\frac{d^2}{R^2}\right| S_{\triangle A_1A_2A_3}$, где R — радиус описанной окружности Σ треугольника $A_1A_2A_3$, d — расстояние точки M от центра окружности Σ. Отсюда вытекает, что при $n=3$ искомое геометрическое место представляет собой окружность, концентрическую Σ (или пару таких окружностей). Далее, при помощи индукции по числу сторон многоугольника показывается, что и при любом n искомое геометрическое место, вообще говоря, будет представлять собой окружность (или пару концентрических окружностей). [См. решение задачи 90 из книги: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементариой математики, ч. 2, М., Гостехиздат, 1952 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 2).]

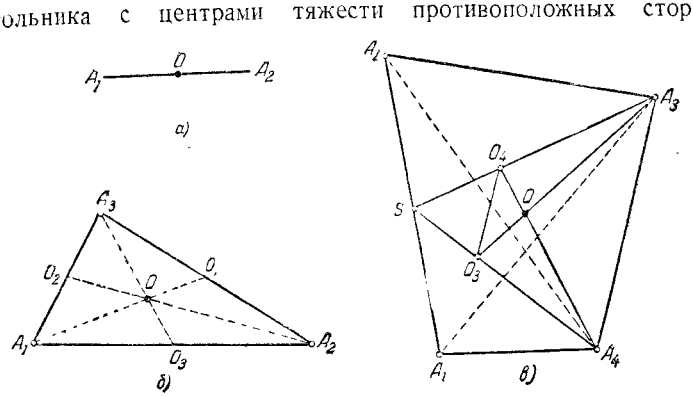
§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ИНДУКЦИИ

Интересные примеры применения метода математической индукции в геометрии доставляют задачи, содержащие понятия, само определение которых использует переход «от n к $n+1$». Задачам такого рода и посвящен настоящий параграф.

Пример 26. Определение медиан и центра тяжести n-угольника.

1°. Центром тяжести отрезка мы будем называть его середину (черт. 47, *а*).

В таком случае медианы треугольника $A_1A_2A_3$ можно определить как отрезки, соединяющие вершины треугольника с центрами тяжести противоположных сторон



Черт. 47.

(черт. 47, *б*). Как известно, медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины. Точку, в которой пересекаются все медианы

треугольника, называют центром тяжести треугольника.

Условимся теперь называть медианами четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ отрезки, соединяющие его вершины A_1, A_2, A_3, A_4 с центрами тяжести O_1, O_2, O_3, O_4 треугольников, образованных остальными тремя вершинами (черт. 47, *в*). Докажем, что *медианы четырехугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении* 3:1, *считая от вершины.* Действительно, обозначим через S центр тяжести (середину) стороны A_1A_2, а через O_4 и O_3 — центры тяжести треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; пусть еще O — точка пересечения медиан A_3O_3 и A_4O_4 четырехугольника. Так как SA_3 и SA_4 — медианы треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$, то

$$\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{3}{1} \text{ и } \frac{SA_4}{SO_3}=\frac{3}{1},$$

и, следовательно,

$$\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{SA_4}{SO_3}.$$

Отсюда вытекает, что $O_3O_4 \parallel A_3A_4$ и $\frac{A_3A_4}{O_3O_4}=\frac{SA_3}{SO_4}=\frac{3}{1}$. Далее, из подобия треугольников OO_3O_4 и OA_3A_4 имеем:

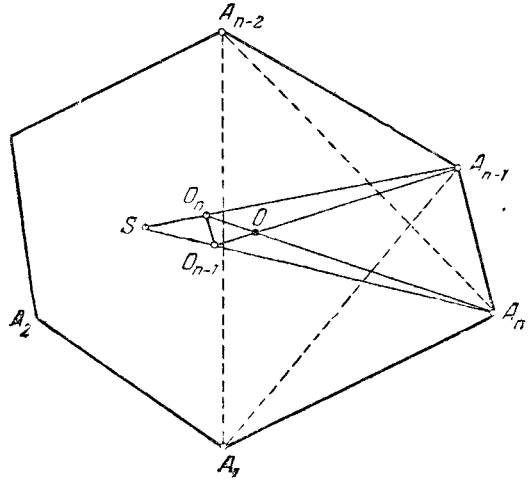
$$\frac{OA_4}{OO_4}=\frac{OA_3}{OO_3}=\frac{A_3A_4}{O_3O_4}=\frac{3}{1}.$$

Таким образом, любые две соседние (т. е. выходящие из смежных вершин) медианы четырехугольника в точке пересечения делятся в отношении 3:1. Отсюда следует, что все четыре медианы четырехугольника проходят через одну точку O, в которой все они делятся в отношении 3:1. Точку O пересечения медиан четырехугольника называют центром тяжести четырехугольника.

2°. Предположим, что для всех $k<n$ мы уже определили медианы k-угольника как отрезки, соединяющие вершины k-угольника с центрами тяжести $(k-1)$-угольников, образованных остальными $k-1$ вершинами, и для всех $k<n$ определили центр тяжести k-угольника как точку пересечения его медиан. Мы будем также предполагать уже доказанным, что медианы k-угольника при $k<n$ делятся в точке пересечения (центре тяжести k-угольника) в отношении $(k-1):1$ (считая от вершины).

Определим теперь медианы n-угольника как отрезки, соединяющие вершины n-угольника с центрами тяжести

$(n-1)$-угольников, образованных остальными $n-1$ вершинами. Докажем что *все медианы n-угольника* $A_1A_2\ldots A_n$ *пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении* $(n-1):1$ (считая от вершины). Действительно, пусть S — центр тяжести $(n-2)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{n-2}$; тогда прямые SA_{n-1} и SA_n будут медианами $(n-1)$-угольников $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ и



Черт. 48.

$A_1A_2\ldots A_{n-2}A_n$ (черт. 48). Если O_n и O_{n-1} — центры тяжести этих $(n-1)$-угольников, то в силу индуктивного предположения

$$\frac{SA_{n-1}}{SO_n}=\frac{SA_n}{SO_{n-1}}=\frac{n-1}{1}.$$

Следовательно, $O_{n-1}O_n \parallel A_nA_{n-1}$ и $\frac{A_{n-1}A_n}{O_{n-1}O_n}=\frac{n-1}{1}$. Обозначим через O точку пересечения медиан $O_{n-1}A_{n-1}$ и O_nA_n n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$. Из подобия треугольников $OO_{n-1}O_n$ и $OA_{n-1}A_n$ следует, что

$$\frac{OA_{n-1}}{OO_{n-1}}=\frac{OA_n}{OO_n}=\frac{A_{n-1}A_n}{O_{n-1}O_n}=\frac{n-1}{1}.$$

Таким образом, любые две смежные медианы n-угольника в точке пересечения делятся в отношении $(n-1):1$. Отсюда и следует, что все медианы n-угольника пересекаются в одной точке (и делятся в ней в отношении $(n-1):1$).

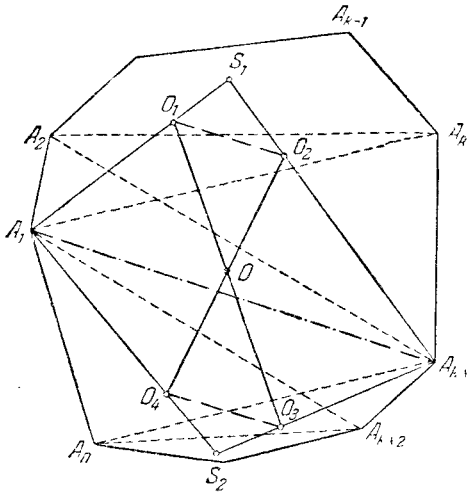
Теперь мы можем определить центр тяжести n-угольника как точку пересечения его медиан, а затем и медианы

$(n+1)$-угольника как отрезки, соединяющие вершины $(n+1)$-угольника с центрами тяжести n-угольников, образованных остальными n вершинами. Метод математической индукции позволяет утверждать, что наши определения медиан и центра тяжести n-угольника имеют смысл при любом n.

Задача 24. В n-угольнике $A_1A_2\ldots A_n$ обозначим через O_1 центр тяжести $(n-1)$-угольника $A_2A_3\ldots A_n$, через O_2 — центр тяжести $(n-1)$-угольника $A_1A_3\ldots A_n$ и т. д., через O_n — центр тяжести $(n-1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{n-1}$. Доказать, что n-угольник $O_1O_2\ldots O_n$ подобен данному n-угольнику $A_1A_2\ldots A_n$.

Указание. Как доказано в примере 26, $O_1O_2 \parallel A_1A_2$ и $\frac{O_1O_2}{A_1A_2}=\frac{1}{n-1}$. Аналогично $O_2O_3 \parallel A_2A_3$ и $\frac{O_2O_3}{A_2A_3}=\frac{1}{n-1}$ и т. д.

Медианой k-го порядка n-угольника $(k<n)$ называется отрезок, соединяющий центр тяжести k-угольника, образованного любыми k вершинами n-угольника, с центром тяжести $(n-k)$-угольника, образованного остальными $n-k$ вершинами. Таким образом, медиана k-го порядка является одновременно и медианой $(n-k)$-го порядка. Медианы n-угольника, определенные в примере 26, можно было бы назвать медианами первого порядка.



Черт. 49.

Задача 25. Доказать, что все медианы k-го порядка n-угольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении $(n-k):k$.

Указание. Пусть S_1 и S_2 — центры тяжести $(k-1)$-угольника $A_2A_3\ldots A_k$ и $(n-k-1)$-угольника $A_{k+2}A_{k+3}\ldots A_n$, O_1 и O_2 — центры тяжести k-угольников $A_1A_2\ldots A_k$ и $A_2A_3\ldots A_{k+1}$, O_3 и O_4 — центры тяжести $(n-k)$-угольников $A_{k+1}\ldots A_n$ и $A_{k+2}\ldots A_nA_1$

(черт. 49). Тогда $\frac{O_1S_1}{O_1A_1}=\frac{O_2S_1}{O_2A_{k+1}}=\frac{1}{k-1}$ и $O_1O_2\parallel A_1A_{k+1}$; $\frac{O_3S_2}{O_3A_{k+1}}=\frac{O_4S_2}{O_4A_1}=\frac{1}{n-k-1}$ и $O_3O_4\parallel A_1A_{k+1}$. Если теперь O — точка пересечения медиан k-го порядка O_2O_4 и O_1O_3, то из подобия треугольников OO_1O_2 и OO_3O_4 имеем:

$$\frac{OO_1}{OO_3}=\frac{OO_2}{OO_4}=\frac{O_1O_2}{O_3O_4}=\frac{\frac{1}{k}A_1A_{k+1}}{\frac{1}{n-k}A_1A_{k+1}}=\frac{n-k}{k}.$$

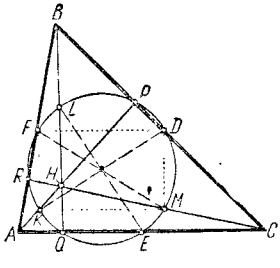
Можно доказать, что при любом k точка пересечения медиан k-го порядка n-угольника совпадает с его центром тяжести.

Задача 26. Сформулировать утверждение задачи 25 при $n=4$, $k=2$.

Ответ. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей произвольного четырехугольника, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Окружность, проходящая через середины трех сторон треугольника (черт. 50), называется окружностью Эйлера этого треугольника; она обладает рядом интересных свойств (так, например, окружность Эйлера треугольника ABC, кроме середин D,E,F сторон, проходит еще через основания P, Q, R высот AP, BQ и CR и через три точки K, L, M, делящие пополам отрезки AH, BH, CH высот между точкой H их пересечения и вершинами[1]); поэтому окружность Эйлера

[1]) Так как четырехугольник $KFDM$ (черт. 50) — прямоугольник (ибо $FK\parallel BH\parallel DM$, так как KF и DM — средние линии треугольников ABH и CBH с общим основанием BH; $FD\parallel AC\parallel KM$, так как FD и KM — средние линии треугольников ABC и AHC с общим основанием AC; $BH\perp AC$), то отрезки FM и DK равны и имеют общую середину. Так же доказывается, что и отрезок EL равен им и середина EL совпадает с общей серединой FM и KD. Отсюда следует, что окружность Эйлера, проходящая через точки D, E и F, проходит также через K, L и M (центр этой окружности совпадает с общей серединой DK, EL и FM, а диаметр равен общей длине этих отрезков).

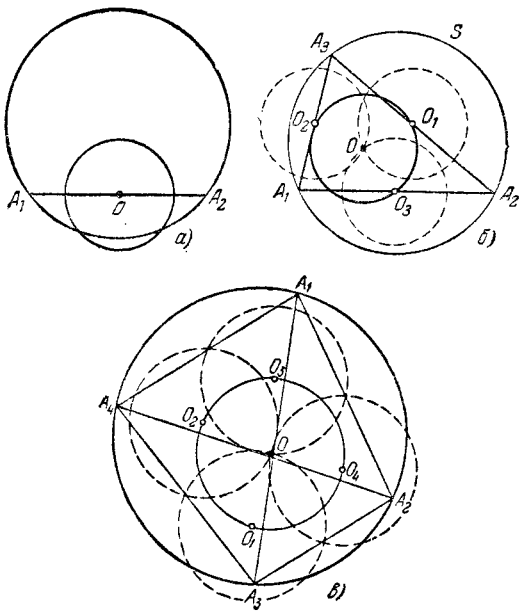


Черт. 50.

Далее, так как по доказанному K и D — диаметрально противоположные точки окружности Эйлера и $\angle KPD=90°$, то окружность Эйлера проходит через точку P; так же доказывается, что она проходит и через точки Q и R.

часто называют еще окружностью девяти точек треугольника). Так как окружность Эйлера треугольника ABC описана вокруг треугольника DEF, подобного ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, то радиус ее равен $R/2$, где R—радиус описанной окружности исходного треугольника ABC. Понятие окружности Эйлера может быть следующим образом распространено на любой вписанный в окружность многоугольник.

Задача 27. 1°. Окружностью Эйлера хорды A_1A_2 окружности S радиуса R называется окружность радиуса $R/2$, центром которой служит середина хорды A_1A_2 (черт. 51, *а*).



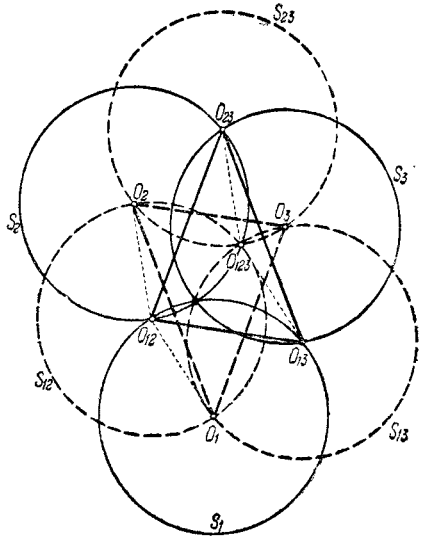
Черт. 51.

Три окружности Эйлера сторон вписанного в окружность S треугольника $A_1A_2A_3$ пересекаются в одной точке O, которая является центром окружности радиуса $R/2$, проходящей через центры трех окружностей Эйлера; эта последняя окружность называется окружностью Эйлера треугольника $A_1A_2A_3$ (черт. 51, *б*).

2°. Предположим, что нами уже определена окружность Эйлера вписанного в окружность S n-угольника и известно, что ее радиус равен $R/2$ (R — радиус окружности S). Рас-

смотрим теперь $(n+1)$-угольник $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$, вписанный в окружность S. В таком случае $n+1$ окружностей Эйлера n-угольников $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3\ldots A_{n+1}$, $\ldots$, $A_1A_2\ldots A_n$ пересекаются в одной точке, которая является центром окружности радиуса $R/2$, проходящей через центры всех $n+1$ окружностей Эйлера; эта окружность называется окружностью Эйлера $(n+1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ (см. черт. 51, *в*, где изображена окружность Эйлера четырехугольника).

Указание. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырехугольник, вписанный в окружность S. Из того, что, например, окружность Эйлера треугольника $A_1A_2A_3$ проходит через три середины отрезков H_4A_1, H_4A_2, H_4A_3, где H_4 — точка пересечения высот $A_1A_2A_3$ (см. выше), вытекает, что она центрально-подобна (гомотетична) окружности S с центром подобия в точке H_4 и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$; поэтому середина отрезка H_4A_4 принадлежит этой окружности. Теперь остается только заметить, что середины отрезков H_1A_1, H_2A_2, H_3A_3 и H_4A_4 (где H_1, H_2 и H_3 — точки пересечения высот соответствующих треугольников) совпадают; это вытекает из того, что, например, четырехугольник $A_1H_2H_1A_2$ является параллелограммом (ибо $A_1H_2 \parallel A_2H_1 \perp A_3A_4$ и $A_1H_2 = A_2H_1 =$ удвоенному расстоянию от центра S до A_3A_4).



Черт. 52

Предположим теперь, что для всех k-угольников, число сторон k которых не превосходит $n \geqslant 4$, существование окружности Эйлера уже доказано, и рассмотрим $(n+1)$-угольник $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$, вписанный в окружность S. Нам надо доказать, что окружности Эйлера S_1, S_2, $\ldots$, S_{n+1} n-угольников $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3A_4\ldots A_{n+1}$, $\ldots$ $\ldots$, $A_1A_2\ldots A_n$ пересекаются в одной точке; для этого достаточно доказать, что пересекаются в одной точке каждые три из них, например S_1, S_2 и S_3 [1]). Обозначим через S_{12}, S_{13}, S_{23} окружности Эйлера

[1]) Ибо если каждые три из $n \geqslant 5$ окружностей (никакие две из которых не совпадают) пересекаются в одной точке, то и все окружности пересекаются в одной точке (для $n = 4$ это уже неверно).

$(n-1)$-угольников $A_3A_4 \ldots A_{n+1}$, $A_2A_4A_5 \ldots A_{n+1}$, $A_1A_4A_5 \ldots A_{n+1}$ и через O_{12}, O_{13}, O_{23} — их центры; пусть еще O_1, O_2, O_3 — центры окружностей S_1, S_2, S_3 и O_{123} — центр окружности Эйлера S_{123} $(n-2)$-угольника $A_4A_5 \ldots A_{n+1}$. В таком случае мы придем к черт. 52, из которого нетрудно усмотреть равенство треугольников $O_1O_2O_3$ и $O_{23}O_{13}O_{12}$. [Для доказательства равенства сторон O_1O_2 и $O_{23}O_{13}$ этих треугольников достаточно рассмотреть треугольники $O_1O_2O_{12}$ и $O_{23}O_{13}O_{123}$, в которых

$$O_{12}O_1 = O_{12}O_2 = O_{123}O_{23} = O_{123}O_{13} = \frac{R}{2},$$

$$\angle O_1O_{12}O_2 = \angle O_1O_{12}O_{123} + \angle O_{123}O_{12}O_2 =$$

$$= 2\angle O_{13}O_{12}O_{123} + 2\angle O_{123}O_{12}O_{23} = 2\angle O_{13}O_{12}O_{23}$$

и

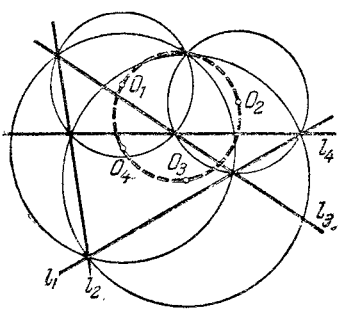
$$\angle O_{23}O_{123}O_{13} = 2\angle O_{13}O_{12}O_{23},$$

как вписанный и центральный угол описанной вокруг $O_{12}O_{13}O_{23}$ окружности, опирающиеся на одну дугу; так же доказывается, что $O_1O_3 = O_{23}O_{12}$ и $O_2O_3 = O_{13}O_{12}$]. Из того, что $\triangle O_1O_2O_3 = \triangle O_{23}O_{13}O_{12}$ и окружности S_{23}, S_{13} и S_{12} пересекаются в одной точке O_{123}, уже следует, что и окружности S_1, S_2 и S_3 пересекаются в одной точке.

Задача 28. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — произвольный n-угольник, вписанный в окружность S. Доказать, что центр тяжести n-угольника (см. пример 26) лежит на отрезке, соединяющем центр S с центром окружности Эйлера n-угольника, и делит этот отрезок в отношении $(n-2):2$.

Указание. Решение этой задачи можно найти в книге И. М. Яглома, указанной на стр. 45 (см. решение задачи 52в)).

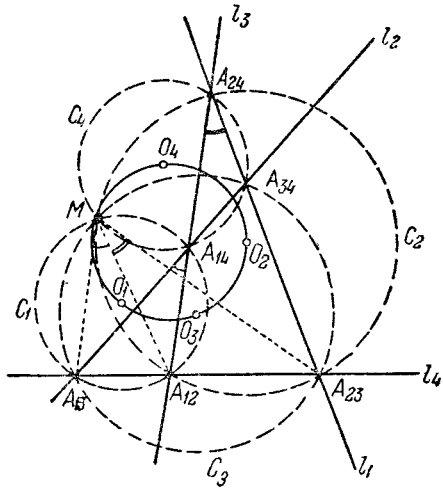
Пример 27. 1°. Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре прямые общего положения, т. е. такие, что никакие две из них не параллельны и никакие три не проходят через одну точку; O_1 — центр окружности, описанной вокруг треугольника, образованного прямыми l_2, l_3, l_4; O_2 — центр окружности, описанной вокруг треугольника, образованного прямыми l_1, l_3, l_4, и т. д. Тогда четыре точки O_1, O_2, O_3 и O_4 лежат на одной окружности, называемой окружностью центров четырех прямых l_1, l_2, l_3, l_4 (черт. 53).



Черт. 53.

2°. Пусть уже определена окружность центров n прямых и пусть даны $n+1$ прямых общего положения l_1, l_2, l_3, ..., l_{n+1}. Обозначим центр окружности центров n прямых l_2, l_3, ..., l_{n+1} через O_1, центр окружности центров n прямых l_1, l_3, ..., l_{n+1} — через O_2 и т. д. Тогда $n+1$ точек O_1, O_2, O_3, ..., O_{n+1} лежат на одной окружности, называемой окружностью центров $n+1$ прямых l_1, l_2, l_3, ..., l_{n+1}.

Доказательство. 1°. Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре прямые общего положения (черт. 54), A_{12} — точка пересечения l_3 и l_4, A_{13} — точка пересечения l_2 и l_4 и т. д.; O_1 — центр окружности C_1, описанной вокруг треугольника, образованного прямыми l_2, l_3 и l_4, и т. д. Докажем, прежде всего, что окружности C_1, C_2, C_3 и C_4 пересекаются



Черт. 54.

в одной точке M. Действительно, если M есть точка пересечения C_1 и C_2, отличная от A_{12}, то

$$\angle A_{13}MA_{12} = \angle A_{13}A_{14}A_{12} = \angle \text{ между } l_2 \text{ и } l_3;$$
$$\angle A_{12}MA_{23} = \angle A_{12}A_{24}A_{23} = \angle \text{ между } l_3 \text{ и } l_1.$$

Отсюда следует, что $\angle A_{13}MA_{23} = \angle$ между l_2 и $l_1 = \angle A_{13}A_{31}A_{23}$, т. е. что окружность C_3 проходит через M; точно так же доказывается, что и C_4 проходит через M.

Теперь мы уже можем доказать, что точки O_1, O_2, O_3 и O_4 лежат на одной окружности. Рассмотрим три окружности C_1, C_2 и C_3, проходящие через одну точку M; C_1 и C_3 пересекаются еще в точке A_{13}, C_2 и C_3 — в точке A_{23}. Отсюда следует [1]):

$$\angle O_1O_3O_2 = \angle A_{13}MA_{23} = \angle A_{13}A_{34}A_{23} = \angle \text{ между } l_2 \text{ и } l_1.$$

Точно так же доказывается, что и $\angle O_1O_4O_2 = \angle$ между l_2 и $l_1 = \angle O_1O_3O_2$, откуда и вытекает требуемое утверждение.

[1]) Точнее, эти углы равны или составляют в сумме 180°. Вообще, чтобы сделать нижеследующие рассуждения независимыми от чертежа, надо воспользоваться понятием направленных углов (см., например, написанные Д. И. Перепелкиным решения задач в книге Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1948, стр. 488—489).

2°. Предположим, что для n прямых наши утверждения уже доказаны; при этом мы можем также считать уже доказанным, что *дуга окружности центров n прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$ между центрами O_1 и O_2 окружностей центров $n-1$ прямых $l_2, l_3, \ldots, l_n$ и $n-1$ прямых $l_1, l_3, \ldots, l_n$ равна удвоенному углу между прямыми l_1 и l_2* (см. конец п. 1°). Рассмотрим теперь $n+1$ прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$ общего положения; пусть O_1 — центр окружности C_1 центров n прямых $l_2, l_3, \ldots, l_{n+1}$ и т. д., O_{12} — центр окружности C_{12} центров $n-1$ прямых $l_3, l_4, \ldots, l_{n+1}$ и т. д. Докажем, что окружности $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ пересекаются в одной точке M. Действительно, пусть M — отличная от O_{12} точка пересечения окружностей C_1 и C_2. В таком случае имеем [1]):

$$\angle O_{13}MO_{12} = \frac{1}{2} \smile O_{13}O_{12} = \angle \text{ между } l_2 \text{ и } l_3;$$

$$\angle O_{13}MO_{23} = \frac{1}{2} \smile O_{12}O_{23} = \angle \text{ между } l_3 \text{ и } l_1.$$

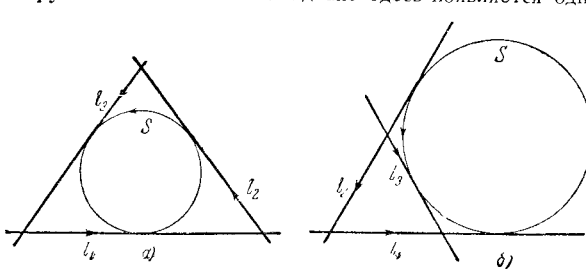
Отсюда следует, что $\angle O_{13}MO_{23} = \angle$ между l_2 и $l_1 = \angle O_{13}O_{31}O_{23}$, т. е. что окружность C_3 проходит через M. Точно так же доказывается и то, что каждая из остальных окружностей $C_4, C_5, \ldots, C_{n+1}$ проходит через M.

Рассмотрим теперь три окружности C_1, C_2 и C_3, проходящие через одну точку M; C_1 и C_3 пересекаются еще в точке O_{13}, C_2 и C_3 — в точке O_{23}. Мы имеем [1]):

$$\angle O_1O_3O_2 = \angle O_{13}MO_{23} = \angle O_{13}O_{43}O_{23} = \angle \text{ между } l_2 \text{ и } l_1.$$

Точно так же показывается, что и для любой из точек O_i ($i = 4, 5, \ldots, n+1$) $\angle O_1O_iO_2 = \angle$ между l_2 и l_1, откуда и следует, что все точки $O_1, O_2, O_3, O_4, \ldots, O_{n+1}$ лежат на одной окружности.

В формулировке примера 27 можно также заменить всюду описанные окружности вписанными. Однако здесь появляется одно допол-



Черт. 55.

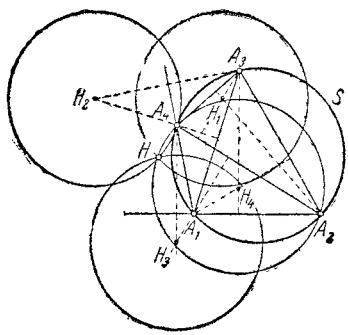
нительное затруднение, связанное с тем, что, в то время как описанная окружность треугольника (окружность, проходящая через все вершины треугольника) определяется однозначно, за его вписанную окружность (окружность, касающуюся всех сторон треугольника) можно принять одну из четырех окружностей (всех трех сторон касаются

[1]) См. сноску на предыдущей странице.

одна вписанная и три вневписанные окружности). Чтобы устранить это затруднение, можно поступить следующим образом. Введем в рассмотрение направленные прямые и окружности, указав стрелкой на каждой линии направление движения по ней; далее будем считать направленные прямую и окружность касающимися лишь в том случае, если направления их в точке касания совпадают. При этом будет существовать уже одна-единственная направленная окружность, касающаяся трех данных направленных прямых l_1, l_2 и l_3, не пересекающихся в одной точке (черт. 55, *а*, *б*), — направленная вписанная окружность образованного l_1, l_2 и l_3 треугольника.

Задача 29. Определение ортоцентра вписанного в окружность многоугольника. 1°. Ортоцентром треугольника, как известно, называется точка пересечения его высот.

2°. Пусть уже определен ортоцентр n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, вписанного в окружность S, и пусть имеем вписанный в S $(n+1)$-угольник $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$. Обозначим через H_1, H_2, ..., H_{n+1} ортоцентры $n+1$ многоугольников $A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $A_1A_3A_4\ldots A_{n+1}$, ..., $A_1A_2\ldots A_n$. В таком случае равные S окружности с центрами в точках H_1, H_2, ..., H_{n+1} пересекаются в одной точке H; эта точка и называется ортоцентром $(n+1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ (так, на черт. 56 изображен ортоцентр четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$).



Черт. 56.

Решение задачи 29 мы предоставляем читателям. Заметим, что ортоцентры вписанных в окружность многоугольников обладают рядом свойств, близких к свойствам ортоцентров треугольников; на перечислении этих свойств, доказывать которые по необходимости приходится методом математической индукции (ибо ортоцентр многоугольника определяется по индукции), мы здесь не можем остановиться.

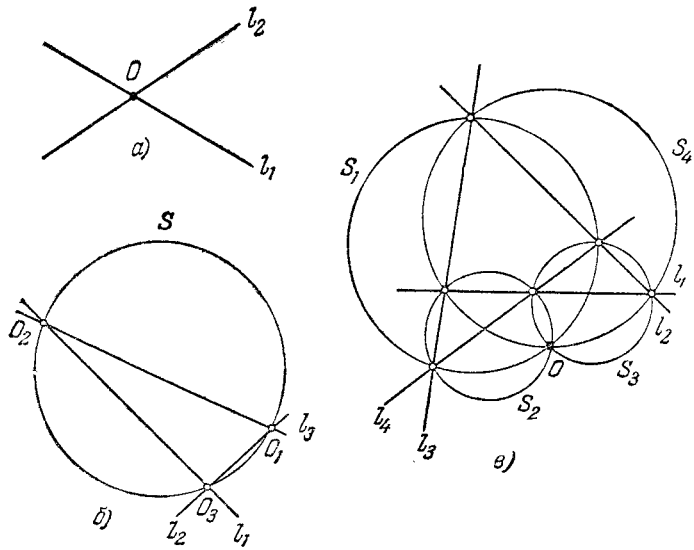
Задача 30. 1°. Центральной точкой двух (пересекающихся) прямых называется точка их пересечения (черт. 57, *а*).

Центральной окружностью трех прямых общего положения (см. пример 27) называется окружность, проходящая через центральные точки каждой пары из этих прямых (черт. 57, *б*).

Пусть теперь даны четыре прямые общего положения l_1, l_2, l_3, l_4. Обозначим через S_1 центральную окружность трех прямых l_2, l_3, l_4, через S_2 — центральную окружность трех прямых l_1, l_3, l_4 и т. д.

Тогда четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4 пересекаются в одной точке O, которая называется центральной точкой четырех прямых l_1, l_2, l_3, l_4 (черт. 57, *в*).

2°. Предположим, что уже определена центральная окружность $2n-1$ прямых и центральная точка $2n$ прямых, и пусть дано $2n+1$ прямых общего положения l_1, l_2, ..., l_{2n}, l_{2n+1}. Обозначим через A_1



Черт. 57.

центральную точку $2n$ прямых l_2, l_3, ..., l_{2n}, l_{2n+1}, через A_2 — центральную точку $2n$ прямых l_1, l_3, ..., l_{2n}, l_{2n+1} и т. д., через A_{2n+1} — центральную точку $2n$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n}. Тогда точки A_1, A_2, ..., A_{2n+1} лежат на одной окружности, которую мы будем называть центральной окружностью $2n+1$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n}, l_{2n+1}.

Пусть, наконец, задано $2n+2$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n+1}, l_{2n+2} общего положения. Обозначим через S_1 центральную окружность $2n+1$ прямых l_2, l_3, ..., l_{2n+1}, l_{2n+2}, через S_2 — центральную окружность $2n+1$ прямых l_1, l_3, ..., l_{2n+1}, l_{2n+2} и т. д., через S_{2n+2} — центральную окружность $2n+1$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n+1}. Тогда окружности S_1, S_2, ..., S_{2n+1}, S_{2n+2} пересекаются в одной точке, которую мы и будем называть центральной точкой $2n+2$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n+1}, l_{2n+2}.

Указание. Доказательства сформулированных здесь предложений можно найти в книге Д. О. Шклярского и др., указанной на стр. 59 (см. решение задачи 125), и в книге: И. М. Яглом, Геометрические преобразования, II, М., Гостехиздат, 1956 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 8) (см. решение задачи 218 а)).

Задача 31. 1°. Даны три прямые l_1, l_2, l_3 общего положения. Центр окружности, описанной вокруг образованного ими треугольника, называется центральной точкой трех прямых.

Рассмотрим теперь четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4 общего положения. Обозначим через A_1 центральную точку трех прямых l_2, l_3, l_4, через A_2 — центральную точку трех прямых l_1, l_3, l_4 и т. д. Тогда четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности (см. выше пример 27), которая называется центральной окружностью четырех прямых l_1, l_2, l_3, l_4.

2°. Пусть уже определены центральная точка $2n-1$ прямых и центральная окружность $2n$ прямых и пусть дано $2n+1$ прямых общего положения l_1, l_2, ..., l_{2n}, l_{2n+1}. Обозначим через S_1 центральную окружность $2n$ прямых l_2, l_3, ..., l_{2n}, l_{2n+1}, через S_2 — центральную окружность $2n$ прямых l_1, l_3, ..., l_{2n}, l_{2n+1} и т. д., через S_{2n+1} — центральную окружность $2n$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n}. Тогда окружности S_1, S_2, ..., S_{2n+1} пересекаются в одной точке, которую мы будем называть центральной точкой $2n+1$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n}, l_{2n+1}.

Пусть, наконец, дано $2n+2$ прямых общего положения l_1, l_2, ..., l_{2n+2}. Центральную точку $2n+1$ прямых l_2, l_3, ..., l_{2n+2} обозначим через A_1, центральную точку $2n+1$ прямых l_1, l_3, ..., l_{2n+2} — через A_2 и т. д., центральную точку $2n+1$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n+1} — через A_{2n+2}. Тогда точки A_1, A_2, ..., A_{2n+2} лежат на одной окружности, которую мы и назовем центральной окружностью $2n+2$ прямых l_1, l_2, ..., l_{2n+2}.

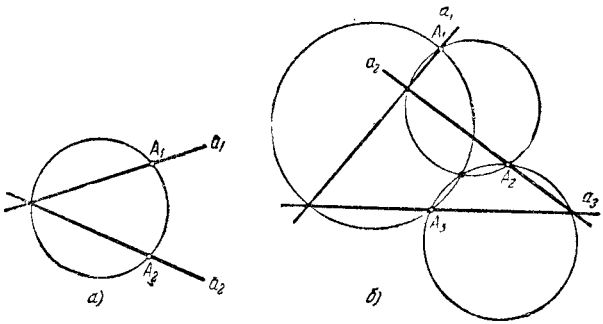
Указание. Доказательства сформулированных здесь предложений совершенно аналогичны доказательствам предложений, составляющих содержание задачи 30.

Линейным элементом называется совокупность точки A и заданного в ней направления, определяемого прямой a, проходящей через A. Линейный элемент обозначается символом (A, a). n линейных элементов (A_1, a_1), (A_2, a_2), ..., (A_n, a_n) мы будем называть конциклическими (от слова «цикл» — окружность), если прямые $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — прямые общего положения (см. выше пример 27) и n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на одной окружности.

Задача 32. 1°. Направляющей окружностью двух линейных элементов (A_1, a_1) и (A_2, a_2) (таких, что точки A_1 и A_2 различны, а прямые a_1 и a_2 пересекаются) называется окружность, проходящая через точки A_1, A_2 и через точку пересечения a_1 и a_2 (черт. 58, *а*). Направляющие окружности трех пар линейных элементов (A_1, a_1) и (A_2, a_2), (A_1, a_1) и (A_3, a_3), (A_2, a_2) и (A_3, a_3) (таких, что точки A_1, A_2, A_3 все различны, а прямые a_1, a_2, a_3 — общего положения) пересекаются в одной точке, называемой направляющей точкой трех линейных элементов (A_1, a_1), (A_2, a_2) и (A_3, a_3) (черт. 58, *б*).

2°. Пусть нами уже определены направляющая окружность $2n-2$ конциклических линейных элементов и направляющая точка $2n-1$ конциклических линейных элементов. Рассмотрим $2n$ конциклических линейных элементов. В таком случае $2n$ направляющих точек всевозможных совокупностей по $2n-1$ из них лежат на одной окружности, называемой направляющей окружностью $2n$ конциклических линейных элементов. Далее, если рассмотреть $2n+1$

концикли́ческих линейных элементов, то всевозможные совокупности по $2n$ из них определят $2n+1$ направляющих окружностей, которые все пересекаются в одной точке — направляющей точке $2n+1$ концикли́ческих линейных элементов.



Черт. 58.

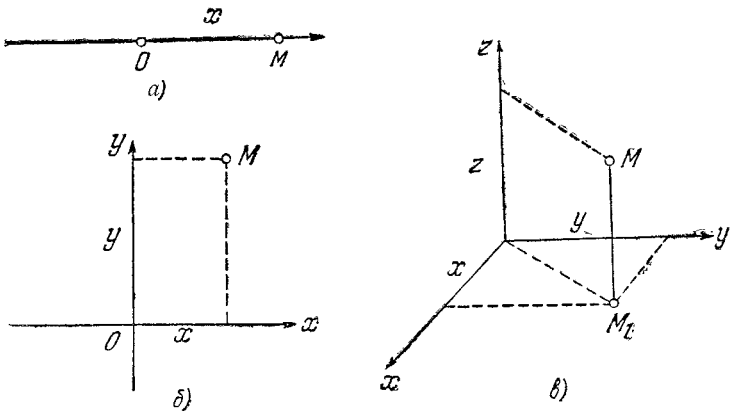
Указание. Доказательства предложений, составляющих содержание этой задачи, можно найти в указанной на стр. 70 книге И. М. Яглома (см. решение задачи 218 б)).

§ 6. ИНДУКЦИЯ ПО ЧИСЛУ ИЗМЕРЕНИЙ

При изучении курса стереометрии бросается в глаза известная аналогия между стереометрическими и планиметрическими теоремами. Так, свойства параллелепипеда во многом подобны свойствам параллелограмма (ср., например, теоремы: «В параллелепипеде противоположные грани равны и диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам» и «В параллелограмме противоположные стороны равны и диагонали в точке пересечения делятся пополам»), свойства шара подобны свойствам круга (ср., например, теоремы: «Касательная плоскость шара перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания» и «Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания»). Однако наряду с этим имеет место и существенная разница между свойствами плоских и пространственных фигур. Главное различие здесь состоит в том, что фигуры на плоскости имеют два измерения («длина» и «ширина»), в то время как пространственные тела имеют три измерения («длина», «ширина» и «высота»). Соответственно этому положение точки на плоскости полностью определяется двумя координатами x и y

(черт. 59, *б*), в то время как для определения положения точки в пространстве надо знать три ее координаты x, y и z (черт. 59, *в*). Поэтому наше обычное пространство часто называют трехмерным пространством («пространством трех измерений»), в то время как про плоскость говорят, что она представляет собой двумерное пространство («пространство двух измерений»).

Эту терминологию можно распространить еще дальше. Положение точки на прямой полностью определяется одной

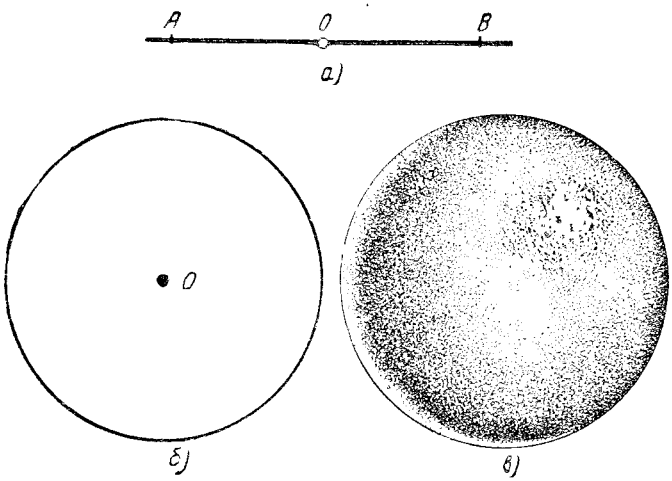


Черт. 59.

единственной координатой x (черт. 59, *а*); это связано с тем, что на прямой линии все фигуры (отрезки) имеют лишь одно измерение («длину»). Поэтому прямую называют одномерным пространством; это позволяет считать, что число измерений пространства может быть равно единице, двум или трем.

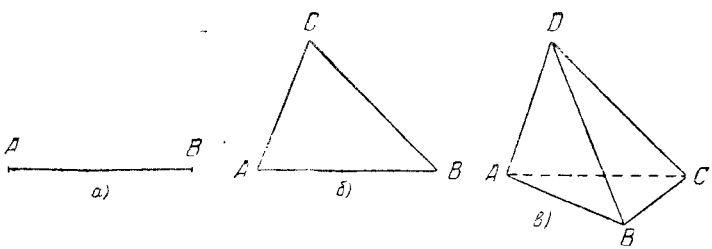
Стереометрические теоремы обычно бывают сложнее соответствующих планиметрических предложений; в свою очередь свойства плоских фигур, разумеется, много сложнее свойств фигур на прямой (отрезков). При этом доказательства «трехмерных» (т. е. стереометрических) теорем часто существенно опираются на знание соответствующих «двумерных» (т. е. планиметрических) предложений; так, например, доказательство того, что диагонали параллелепипеда делятся в точке пересечения пополам, использует соответствующее свойство диагоналей параллелограмма. В свою очередь доказательства «двумерных» теорем иногда основываются на аналогичных

«одномерных». Это обстоятельство делает возможным использование в некоторых геометрических задачах индукции по числу измерений, заключающейся в последовательном переходе от одномерного к двумерному, а затем к трехмерному пространству; примеры такого рода и собраны в настоящем параграфе. При этом индукция по числу измерений часто используется одновременно с обычной индукцией, а иногда она может быть заменена обыкновенной индукцией.



Черт. 60.

При разборе примеров и решении задач этого параграфа следует иметь в виду, что окружности на плоскости (т. е. геометрическому месту точек, равноудаленных от данной



Черт. 61.

точки O, черт. 60, *б*) в пространстве соответствует сфера (поверхность шара, черт. 60, *в*), а на прямой линии — пара

точек, равноудаленных от данной точки O (черт. 60, *а*); кругу на плоскости в пространстве соответствует шар, а на прямой — отрезок, наконец, треугольнику ABC на плоскости (черт. 61, *б*) в пространстве соответствует тетраэдр (т. е. произвольная треугольная пирамида, имеющая четыре вершины A, B, C, D, черт. 61, *в*), а на плоскости — отрезок AB, имеющий две «вершины» A и B (черт. 61, *а*).

Следует отметить, что вопрос о том, какое стереометрическое предложение соответствует данной планиметрической теореме, вообще говоря, не решается однозначно. Иногда удобно считать, что треугольнику на плоскости отвечает не тетраэдр (фигура, имеющая на одно измерение больше), а такой же треугольник, только расположенный в пространстве; аналогично этому можно считать, что прямой на плоскости в пространстве соответствуют и прямая, и плоскость. При этом можно получать разные «стереометрические аналоги» одной и той же планиметрической теоремы. Так, например, теореме «сумма квадратов расстояний от точки M плоскости до всех вершин правильного n-угольника с центром O, вписанного в окружность радиуса R, равна $n(R^2+OM^2)$» (см., например, указанную на стр. 6 книгу Д. О. Шклярского и др., задачу 234) отвечают следующие две стереометрические теоремы: «сумма квадратов расстояний от точки M пространства до всех вершин правильного n-угольника с центром O, вписанного в окружность радиуса R, равна $n(R^2+OM^2)$» и «сумма квадратов расстояний от точки M пространства до всех вершин правильного многогранника с n вершинами, вписанного в сферу с центром O и радиусом R, равна $n(R^2+OM^2)$»; обе эти теоремы верны и обе выводятся из соответствующей «двумерной» теоремы, так что при выводе обеих используется индукция по числу измерений. Мы не останавливаемся подробнее на этом вопросе, предоставив читателю самостоятельно сравнить переход от «одномерной» к «двумерной» и к «трехмерной» теоремам, например, в нижеследующих примерах 29 и 37 с одной стороны и 35 и 36 с другой стороны.

В соответствии с общим планом брошюры настоящий параграф состоит из четырех частей: 1) вычисление с помощью индукции по числу измерений; 2) доказательство с помощью индукции по числу измерений; 3) нахождение геометрических мест с помощью индукции по числу измерений; 4) определение с помощью индукции по числу измерений. Пункт, посвященный решению задач на построение с помощью индукции по числу измерений, сюда не включен, так как сам вопрос о построениях в пространстве не является достаточно определенным. Во всех случаях основным считается «трехмерное» (стереометрическое) предложение, хотя часто наибольший интерес представляет соответствующий результат, относящийся к «двумерному» (плоскому) случаю; в этих случаях переход от двумерного к трехмерному случаю лишь намечается, а не проводится со всей полнотой.

В современной математике и физике большую роль играет понятие n-мерного пространства, в котором положение точки определяется n координатами; здесь n — произвольное целое положительное число (в частности, может быть, $n > 3$)[1]). Свойства фигур в n-мерном пространстве часто доказываются с помощью математической индукции по числу измерений пространства; в частности, этот метод позволяет распространить на n-мерное пространство все результаты настоящего параграфа. Однако это уже выходит за рамки нашей брошюры.

1. Вычисление с помощью индукции по числу измерений

Пример 28. На сколько частей разбивают пространство n плоскостей, каждые три из которых пересекаются и никакие четыре не имеют общей точки (такие плоскости мы будем называть «плоскостями общего положения»)?

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. Определить, на сколько частей разбивают прямую n точек.

Решение. Обозначим это число через $F_1(n)$; очевидно, что $F_1(n) = n + 1$.

Б. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, каждые две из которых пересекаются и никакие три не имеют общей точки (n прямых «общего положения»)?

Решение. 1°. Одна прямая разбивает плоскость на две части.

2°. Предположим, что нам известно число $F_2(n)$ частей, на которые разбивают плоскость n прямых общего положения, и рассмотрим $n + 1$ прямых общего положения. Первые n из них разбивают плоскость на $F_2(n)$ частей; $(n + 1)$-я прямая l, по условию, пересекается с каждой из остальных n прямых в n различных точках; эти точки разбивают прямую l на $F_1(n) = n + 1$ частей (см. пункт А). Следовательно, прямая l пересекает $n + 1$ из ранее полученных частей плоскости, и значит, добавляет к $F_2(n)$ частям $F_1(n) = n + 1$ новых частей. Таким образом,

$$F_2(n+1) = F_2(n) + F_1(n) = F_2(n) + (n+1). \qquad (13)$$

[1]) См., например, статью А. И. Узкова «Векторные пространства и линейные преобразования» во втором томе «Энциклопедии элементарной математики» (М. — Л., Гостехиздат, 1951). Следует только предупредить, что эта статья требует известной математической культуры и не рассчитана на школьника.

Подставляя в равенство (13) вместо n значения $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, получим:

$$\begin{aligned}
F_2(n) &= F_2(n-1)+n,\\
F_2(n-1) &= F_2(n-2)+(n-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_2(3) &= F_2(2)+3,\\
F_2(2) &= F_2(1)+2.
\end{aligned}$$

Сложим все эти равенства; так как $F_2(1)=2$, мы будем иметь:

$$\begin{aligned}
F_2(n) &= F_2(1)+[n+(n-1)+\ldots+2]=\\
&= 1+[n+(n-1)+\ldots+2+1],
\end{aligned}$$

и окончательно:

$$F_2(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

(см. формулу (2) Введения, стр. 8).

В. Задача, сформулированная в начале настоящего примера.

Решение. 1°. Одна плоскость разбивает пространство на две части.

2°. Предположим, что нам известно число $F_3(n)$ частей, на которые разбивают пространство n плоскостей общего положения, и рассмотрим $n+1$ плоскостей общего положения. Первые n из них разбивают пространство на $F_3(n)$ частей; $(n+1)$-ю плоскость π эти n плоскостей пересекают по n прямым общего положения и, следовательно, разбивают ее на $F_2(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$ частей (см. пункт Б). Таким образом, получаем соотношение

$$F_3(n+1)=F_3(n)+F_2(n)=F_3(n)+\frac{n^2+n+2}{2}. \qquad (14)$$

Заменив в равенстве (14) n на $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, будем иметь:

$$\begin{aligned}
F_3(n) &= F_3(n-1)+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2},\\
F_3(n-1) &= F_3(n-2)+\frac{(n-2)^2+(n-2)+2}{2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_3(3) &= F_3(2)+\frac{2^2+2+2}{2},\\
F_3(2) &= F_3(1)+\frac{1^2+1+2}{2}.
\end{aligned}$$

Складывая все эти равенства, получим:

$$F_3(n) = F_3(1) + \frac{1}{2}[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2] +$$

$$+ \frac{1}{2}[(n-1) + (n-2) + \ldots + 1] + \frac{1}{2}\underbrace{[2 + 2 + \ldots + 2]}_{n-1 \text{ раз}},$$

или окончательно, учитывая формулы (2) и (3) Введения и то, что $F_3(1) = 2$:

$$F_3(n) = 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{(n-1)n}{4} + (n-1) =$$

$$= \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}.$$

Задача 33. На сколько частей разбивают пространство n сфер, каждые две из которых пересекаются между собой?

Указание. Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. На сколько частей делят прямую n «одномерных окружностей», т. е. n пар точек (см. введение к этому параграфу, стр. 74—75).

Ответ. $2n$ точек делят прямую на $2n+1$ частей.

А'. Найти число $\Phi_1(n)$ частей, на которые делят окружность n пар точек, расположенных на этой окружности.

Ответ. $\Phi_1(n) = 2n$.

Б. Найти число $\Phi_2(n)$ частей, на которые делят плоскость n попарно пересекающихся окружностей.

Решение. Так как n окружностей пересекают $(n+1)$-ю окружность в n парах точек и, следовательно, делят ее на $\Phi_1(n) = 2n$ частей (см. п. А'), то $(n+1)$-я окружность пересекает $\Phi_1(n) = 2n$ из тех $\Phi_2(n)$ частей, на которые делят плоскость n окружностей. Отсюда получаем равенство

$$\Phi_2(n+1) = \Phi_2(n) + \Phi_1(n) = \Phi_2(n) + 2n.$$

Используя это равенство и то, что $\Phi_2(1) = 2$, будем иметь:

$$\Phi_2(n) = n^2 - n + 2.$$

Б'. На сколько частей делят сферу n попарно пересекающихся окружностей, расположенных на этой сфере?

Ответ. На $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ частей.

В. Исходная задача.

Решение. Так как n сфер пересекают $(n+1)$-ю сферу по n окружностям и, следовательно, разбивают ее поверхность на $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ частей (см. пункт Б'), то если n попарно пересекающихся сфер разбивают пространство на $\Phi_3(n)$ частей, то $n+1$ сфер разобьют пространство на

$$\Phi_3(n+1) = \Phi_3(n) + \Phi_2(n) = \Phi_3(n) + (n^2 - n + 2)$$

частей. Отсюда и из того, что $\Phi_3(1) = 2$, можно найти

$$\Phi_3(n) = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}.$$

2. Доказательство с помощью индукции по числу измерений

Пример 29. Тетраэдр, четыре вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3 и 4, разбит на меньшие тетраэдры так, что каждые два из тетраэдров разбиения либо совсем не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общее ребро (но не часть ребра), либо имеют общую грань (но не часть грани). Все вершины полученных малых тетраэдров занумерованы теми же цифрами 1, 2, 3 и 4, причем все вершины, лежащие на грани большого тетраэдра, нумеруются тремя цифрами, которыми занумерованы вершины этой грани, а все вершины, лежащие на каком-либо ребре большого тетраэдра, нумеруются двумя цифрами, которыми занумерованы концы ребра. Доказать, что найдется по крайней мере один малый тетраэдр, все четыре вершины которого занумерованы разными цифрами.

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. Отрезок, концы которого обозначены цифрами 1 и 2, разбит на несколько непересекающихся меньших отрезков и все точки деления занумерованы цифрами 1 или 2 (черт. 62, *а*). Доказать, что найдется по крайней мере один отрезок разбиения, концы которого занумерованы разными цифрами.

Решение. Покажем, что число отрезков, обозначенных цифрами 1 2, нечетно; отсюда и будет следовать существование хотя бы одного такого отрезка (ибо нуль есть число четное). Обозначим через A число концов отрезков разбиения, занумерованных цифрой 1. Это число, очевидно, будет нечетным, ибо каждая цифра 1, стоящая внутри большого отрезка (число таких цифр 1 обозначим через k), является концом двух отрезков разбиения, и лишь единственная цифра 1, которой занумерован конец большого отрезка, принадлежит одному отрезку разбиения; следовательно,

$$A = 2k + 1.$$

С другой стороны, пусть p будет число отрезков 1 1 среди всех наших отрезков разбиения и q — число отрезков 1 2. Тогда число A вершин 1 будет равно

$$A = 2p + q.$$

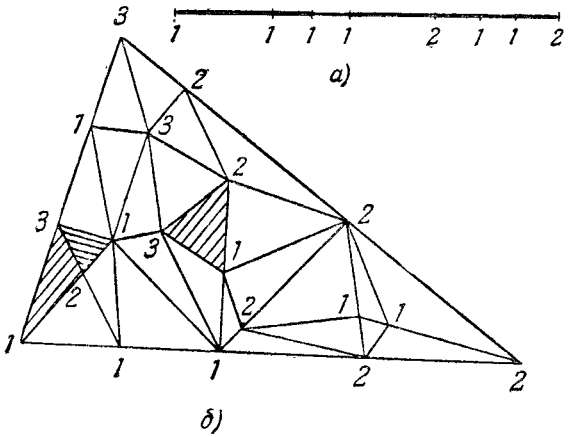
Из равенства

$$2k + 1 = 2p + q$$

следует, что q нечетно.

Б. Треугольник, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2 и 3, разбит на меньшие треугольники так, что два

треугольника разбиения либо совсем не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону (но не часть стороны). Все вершины треугольников разбиения нумеруются цифрами 1, 2 и 3, причем вершины, лежащие на стороне большого треугольника, нумеруются одной из цифр, которой занумерованы концы этой стороны (черт. 62, *б*).



Черт. 62.

Доказать, что найдется по крайней мере один треугольник разбиения, все вершины которого занумерованы разными цифрами.

Решение. Покажем, что число треугольников 1 2 3 нечетно. Для этого сосчитаем общее число A сторон треугольников разбиения, занумерованных цифрами 1 2. Число отрезков 1 2, лежащих внутри основного треугольника, обозначим через k, а число таких отрезков, лежащих на стороне 1 2 большого треугольника,— через l (на других сторонах основного треугольника вообще не может быть отрезков 1 2). Так как каждый из первых k отрезков разбиения принадлежит двум треугольникам разбиения, а каждый из l последних отрезков — одному, то

$$A = 2k + l.$$

С другой стороны, пусть p — число треугольников разбиения, вершины которых занумерованы цифрами 1 2 2 или 1 2 1, и q — число треугольников 1 2 3. Так как каждый из пер-

вых p треугольников имеет две стороны 1 2, а каждый из q последних — одну такую сторону, то

$$A = 2p + q.$$

Из равенства

$$2k + l = 2p + q$$

следует, что число q четно или нечетно одновременно с числом l. Но число l нечетно в силу предложения А, а следовательно, и q нечетно.

В. Предложение, сформулированное в начале этого примера.

Решение. Пусть A будет число граней тетраэдров разбиения, обозначенных цифрами 1 2 3. Если k таких граней лежат внутри основного тетраэдра и l — на его грани 1 2 3, то

$$A = 2k + l.$$

С другой стороны, если p — число тетраэдров разбиения, обозначенных цифрами 1 1 2 3, 1 2 2 3 или 1 2 3 3, а q — число тетраэдров разбиения, обозначенных цифрами 1 2 3 4, то, очевидно,

$$A = 2p + q.$$

Из равенства

$$2k + l = 2p + q$$

следует, что числа q и l одновременно четны или нечетны. Но число l в силу предложения Б нечетно и, следовательно, и q нечетно.

Во введении к этому параграфу мы указывали, что индукция по числу измерений иногда может быть заменена обыкновенной индукцией. Приведем здесь соответствующие примеры.

Пример 30. Доказать сформулированное в примере 29 А предложение индукцией по числу n отрезков разбиения.

Решение. 1°. При $n = 1$ утверждение очевидно.

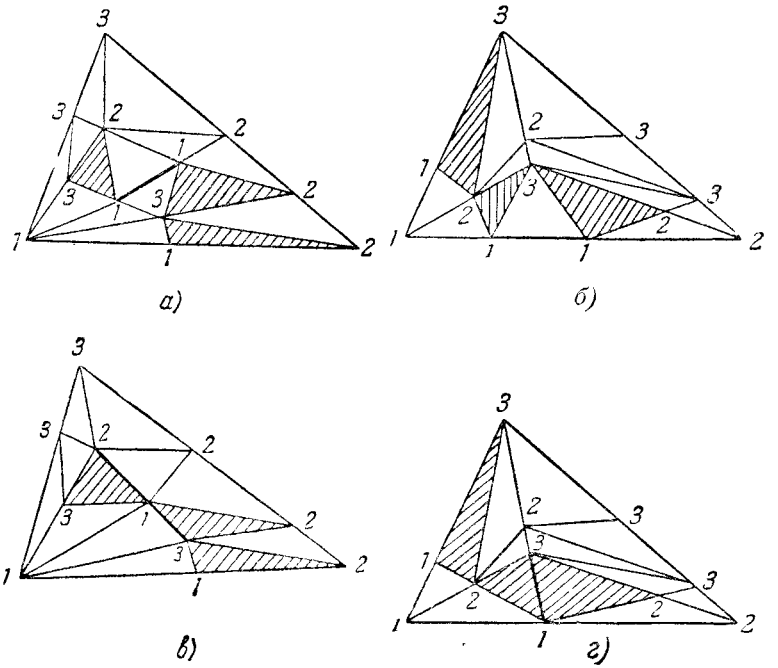
2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любого разбиения отрезка на n меньших отрезков, и пусть дано разбиение отрезка 1 2 на $n + 1$ меньших отрезков. Если не все из этих отрезков обозначены цифрами 1 2, то найдется отрезок, концы которого обозначены одинаковыми цифрами, например 1 1. Стянем этот отрезок в точку, тогда мы получим разбиение отрезка 1 2 на n меньших отрезков. В силу индуктивного предположения в этом разбиении

а значит, и в первоначальном разбиении найдется по крайней мере один отрезок, обозначенный цифрами 1 2, что и требовалось доказать.

Пример 31. Доказать сформулированное в примере 29 Б предложение индукцией по числу n треугольников разбиения.

Решение. 1°. При $n=1$ утверждение очевидно; при $n=2$ оно легко проверяется.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любого разбиения треугольника 1 2 3 на n или меньше треугольников, и пусть мы имеем разбиение треугольника на $n+1$ треугольников. Если не все из этих треугольников обозначены цифрами 1 2 3, то найдется треугольник, у которого две вершины имеют одинаковые номера, например 1. К стороне 1 1 прилегают либо два треугольника разбиения



Черт. 63.

(если эта сторона лежит внутри основного треугольника, черт. 63, *а*), либо один треугольник (если эта сторона лежит на стороне основного треугольника, черт. 63, *б*). Стянем от-

резок 1 1 в точку; мы получим новое разбиение треугольника 1 2 3 на $n-1$ (в первом случае, черт. 63, *в*) или на n (во втором случае, черт. 63, *г*) треугольников. В силу индуктивного предположения в этом разбиении (а значит, и в первоначальном разбиении) найдется по крайней мере один треугольник, вершины которого обозначены цифрами 1 2 3.

Задача 34. Доказать теорему примера 29 В индукцией по числу n тетраэдров разбиения.

Указание. Доказательство аналогично доказательству утверждения примера 31.

Предложение примера 29 можно еще уточнить. Введем понятие «ориентировки» тетраэдра, вершины которого занумерованы цифрами 1 2 3 4, различая тетраэдры, для которых обход вдоль грани 1 2 3 от вершины 1 к вершине 2 и затем к вершине 3 представляется из вершины 4 совершаемым по часовой стрелке, и такие, для которых этот обход наблюдается из вершины 4 происходящим против часовой стрелки. В таком случае имеет место следующее предложение.

Задача 35. Доказать, что в условиях примера 29 число тетраэдров разбиения, занумерованных цифрами 1 2 3 4 и ориентированных так же, как и большой тетраэдр, будет ровно на единицу больше числá тетраэдров 1 2 3 4, ориентированных противоположным образом.

Указание. Рассмотреть последовательно следующие задачи.

А. В условиях примера 29 А будем различать отрезки 1 2, для которых направление от вершины 1 к вершине 2 совпадает с направлением от 1 к 2 для основного отрезка, и отрезки 1 2, для которых направление от 1 к 2 противоположно направлению основного отрезка. Доказать, что число первых отрезков на единицу больше, чем число вторых.

Б. Будем говорить, что треугольник 1 2 3 (см. пример 29 Б) ориентирован по часовой стрелке (или против часовой стрелки), если обход его вершин от вершины 1 к вершине 2 и затем к вершине 3 происходит по часовой стрелке (или против часовой стрелки). Доказать, что число треугольников разбиения, занумерованных цифрами 1 2 3 и ориентированных так же, как и основной треугольник, ровно на единицу больше числа остальных треугольников разбиения, занумерованных цифрами 1 2 3.

В. Предложение, сформулированное в начале условия задачи.

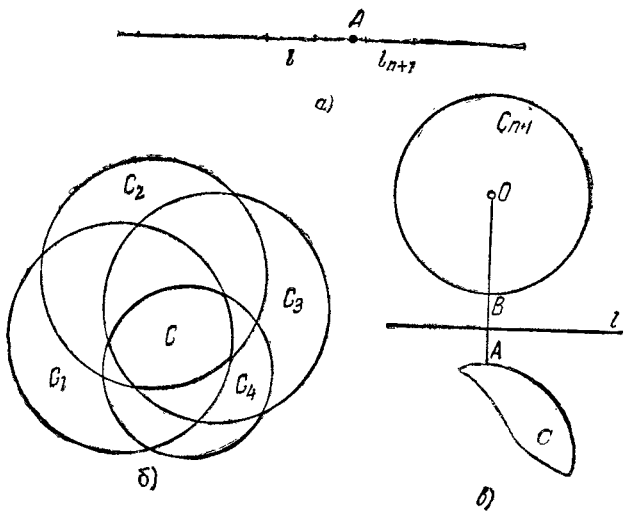
Пример 32. В пространстве задано n шаров, каждые четыре из которых пересекаются. Доказать, что все эти шары пересекаются, т. е. что существует точка, принадлежащая всем шарам.

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. На прямой задано n отрезков, каждые два из которых пересекаются. Доказать, что все отрезки пересекаются, т. е. что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.

Решение. 1°. Для $n=2$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любых n отрезков, и пусть на прямой задано $n+1$ попарно пересекающихся отрезков $l_1, l_2, \ldots, l_n, l_{n+1}$. В силу индуктивного предположения n отрезков $l_1, l_2, \ldots, l_n$ пересекаются. Обозначим их общую часть (которая будет, очевидно, точкой или отрезком) через l. Докажем, что отрезок l_{n+1} пересекается с l. Допустим, что это не так; тогда существует точка A, разделяющая l_{n+1} и l (черт. 64, *а*). Но



Черт. 64.

каждый из отрезков $l_1, l_2, \ldots, l_n$ содержит l и, по условию, пересекается с отрезком l_{n+1}, следовательно, каждый из этих отрезков содержит точку A, а значит, точка A принадлежит l. Полученное противоречие доказывает, что l_{n+1} и l пересекаются; их общая часть принадлежит всем заданным отрезкам $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$.

Б. На плоскости задано n кругов, каждые три из которых пересекаются. Доказать, что существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем этим кругам.

Р е ш е н и е. 1°. При $n=3$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любых n кругов, и пусть на плоскости задано $n+1$ кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$. В силу индуктивного предположения n кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ пересекаются; обозначим их общую часть через C (черт. 64, *б*) («круговой многоугольник» C может представлять собой целый круг или состоять из одной лишь точки). Нам надо доказать, что фигура C и круг C_{n+1} пересекаются. Предположим, что это не так; в таком случае можно провести прямую l, разделяющую фигуры C_{n+1} и C: такой прямой будет, например, перпендикуляр l к прямой, соединяющей центр O круга C_{n+1} с самой близкой к O точкой A фигуры C, восставленный в середине отрезка AB, где B — точка пересечения отрезка OA с окружностью круга C_{n+1} (черт. 64, *в*) [1]).

Так как каждый из кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ содержит фигуру C и, по условию, пересекается с кругом C_{n+1}, то он пересекает и прямую l. Обозначим отрезок, по которому круг C_1 пересекает прямую l, через a_1, отрезок, по которому круг C_2 пересекает эту прямую,— через a_2 и т. д. На прямой l мы будем иметь тогда n отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Любые два из этих отрезков пересекаются. Действительно, рассмотрим два из них, например a_1 и a_2. Пусть M — произвольная точка фигуры C (тогда точка M принадлежит обоим кругам C_1 и C_2). Далее, так как любые три из заданных кругов пересекаются, то существует точка N, принадлежащая одновременно кругам C_1, C_2 и C_{n+1}. Тогда отрезок MN целиком принадлежит кругам C_1 и C_2, а, значит, точка его пересечения с прямой l будет общей точкой отрезков a_1 и a_2.

Как следует из предложения А, на прямой l существует точка, принадлежащая всем отрезкам $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Эта точка должна принадлежать всем кругам $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и, значит, фигуре C, что противоречит построению прямой l. Следовательно, фигуры C_{n+1} и C должны иметь хотя бы одну

---

[1]) Действительно, если прямая l не разделяет фигур C_{n+1} и C, то на ней найдется точка K, принадлежащая фигуре C. В треугольнике OAK угол OAK — острый; кроме того, по определению точки A $OA \leqslant OK$. Следовательно, основание L перпендикуляра, опущенного из O на прямую AK, будет лежать между точками A и K. Так как обе точки A и K принадлежат всем кругам $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то и весь отрезок AK, а следовательно, и его точка L принадлежат каждому из кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и значит, L принадлежит C. Поэтому должно быть $OL \geqslant OA$. Полученное противоречие («перпендикуляр больше наклонной») доказывает наше утверждение.

общую точку, которая и будет общей точкой всех кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$.

В. Предложение, сформулированное в начале примера.

Решение. 1°. Для $n = 4$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любых n шаров, и пусть дано $n+1$ шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$. Обозначим через Φ пересечение n шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ (существующее в силу индуктивного предположения). Тогда точно так же, как в примере 32 Б, можно показать, что если шар Φ_{n+1} не пересекается с Φ, то существует разделяющая их плоскость π. Фигуры, по которым каждый из шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ пересекает плоскость π, являются кругами, любые три из которых пересекаются; следовательно, на плоскости π существует точка, принадлежащая всем этим кругам и, значит, принадлежащая Φ, что противоречит определению плоскости π.

Предложение примера 32 тоже может быть доказано не индукцией по числу измерений, а прямой индукцией по числу фигур.

Пример 33. Доказать предложение примера 32 Б индукцией по числу кругов.

Решение. Мы докажем соответствующее предложение для круговых многоугольников, т. е. для фигур, каждая из которых является пересечением конечного числа кругов; отсюда, в частности, будет следовать и наше первоначальное утверждение.

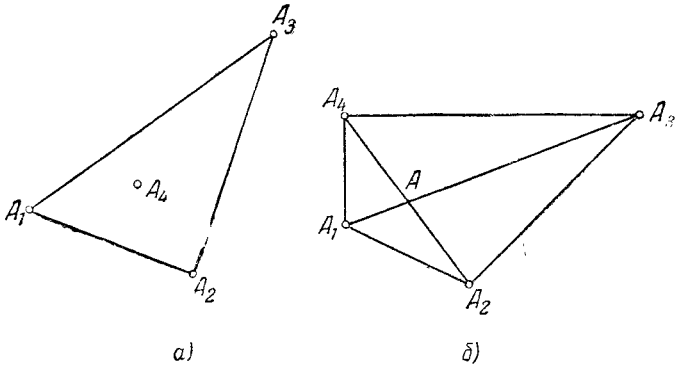
1°. Для $n = 3$ утверждение очевидно.

Пусть даны четыре круговых многоугольника C_1, C_2, C_3, C_4, каждые три из которых пересекаются. Обозначим через A_1 общую точку фигур C_2, C_3 и C_4, через A_2 — общую точку фигур C_1, C_3 и C_4 и т. п. Возможны два случая:

а) Одна из точек A_1, A_2, A_3, A_4, например A_4, принадлежит треугольнику, образованному остальными тремя точками (черт. 65, *а*). Тогда, так как весь треугольник $A_1A_2A_3$ принадлежит C_4, точка A_4 тоже принадлежит C_4 и, следовательно, A_4 будет общей точкой всех четырех фигур C_1, C_2, C_3, C_4.

б) Ни одна из точек A_1, A_2, A_3, A_4 не принадлежит треугольнику, образованному остальными точками. В этом случае точка A пересечения диагоналей (выпуклого) четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (черт. 65, *б*) как общая точка треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$ будет общей точкой всех четырех фигур C_1, C_2, C_3, C_4.

2°. Пусть наше утверждение уже доказано для n круговых многоугольников. Рассмотрим $n+1$ круговых многоугольников $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$. Обозначим через C пересечение фигур C_n и C_{n+1} (ясно, что C тоже будет круговым многоугольником) и докажем, что любые три из n фигур $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C$ пересекаются. Действительно, если среди этих трех фигур нет C, то они пересекаются по условию. Рассмотрим теперь любую тройку этих фигур, содержащую C, например C_1, C_2, C. Так как из четырех фигур C_1, C_2, C_n, C_{n+1}



а) б)

Черт. 65.

любые три пересекаются, то в силу п. 1° эти четыре фигуры имеют общую точку, которая и будет общей точкой фигур C_1, C_2 и C.

Так как любые три из n фигур $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C$ пересекаются, то в силу индуктивного предположения все эти фигуры имеют общую точку, которая и будет общей точкой $n+1$ фигур $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$.

Задача 36. Доказать предложение примера 33 В индукцией по числу n шаров.

Указание. Доказать соответствующее предложение для «шаровых многогранников», т. е. тел, каждое из которых является пересечением конечного числа шаров. Доказательство этого предложения проводится аналогично доказательству утверждения примера 33.

Задача 37. На плоскости дано n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расстояние между каждыми двумя из которых не превосходит единицы. Доказать, что все эти точки можно заключить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (теорема Юнга)[1].

[1]) Дж. Юнг — английский математик XIX в.

Указание. Показать прежде всего, что любые три из этих точек можно заключить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Затем построить круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центром в каждой из заданных точек и показать, что любые три из этих кругов пересекаются. Общая точка всех этих кругов, существующая в силу результата примера 32 Б, и будет центром круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$, содержащего все заданные точки.

Задача 38. В пространстве дано n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расстояние между каждыми двумя из которых не превосходит единицы. Доказать, что все эти точки можно заключить в шар радиуса $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Указание. Доказательство аналогично решению задачи 37.

Обобщение предложения примера 32 и ряд приложений более общей теоремы можно найти в книге: И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, § 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 4).

Пример 34. Рассмотрим какое-то конечное число полупространств [1]), заполняющих все пространство. Доказать, что из них можно выбрать четыре (или меньше) полупространства, уже заполняющих все пространство.

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. Вся прямая покрыта каким-то конечным числом лучей. Доказать, что из них можно выбрать два луча, уже покрывающих всю прямую.

Решение. Пусть A будет самая правая вершина всех лучей, направленных влево, а B — самая левая вершина всех лучей, направленных вправо. Так как лучи, по условию, покрывают всю прямую, то точка B лежит не правее A, и два луча с вершинами в точках A и B полностью покрывают всю прямую.

Б. Вся плоскость покрыта каким-то конечным числом n полуплоскостей [2]). Доказать, что из них можно выбрать две или три полуплоскости, уже покрывающие всю плоскость.

---

[1]) Полупространством называется часть пространства, лежащая по одну сторону от некоторой плоскости.

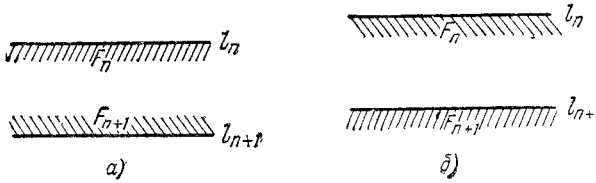
[2]) Полуплоскостью называется часть плоскости, лежащая по одну сторону от некоторой прямой.

Р е ш е н и е. Доказательство проведем индукцией по числу n полуплоскостей.

1°. При $n=3$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение справедливо для n полуплоскостей, и пусть дано $n+1$ полуплоскостей F_1, F_2... ..., F_n, F_{n+1}, покрывающих всю плоскость. Границы этих полуплоскостей обозначим соответственно через l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1}. Возможны два случая.

1-й с л у ч а й. Прямая l_{n+1} целиком содержится в одной из заданных полуплоскостей, скажем в F_n. Тогда прямые l_n и l_{n+1} параллельны. Если полуплоскости F_n и F_{n+1} расположены по разные стороны от своих границ (черт. 66, *а*), то



Черт. 66.

две полуплоскости F_n и F_{n+1} уже покрывают всю плоскость. В противном случае одна из этих двух полуплоскостей целиком содержится в другой (например, F_{n+1} содержится в F_n; черт. 66, *б*), и теорема следует из индуктивного предположения, так как в этом случае уже n полуплоскостей (в нашем случае — $F_1, F_2, \ldots, F_n$) покрывают всю плоскость.

2-й с л у ч а й. Прямая l_{n+1} не содержится ни в одной из полуплоскостей $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Тогда она полностью покрывается этими полуплоскостями, которые высекают на ней $m \leqslant n$ лучей, покрывающих всю прямую. Как мы видели в А, из этих лучей можно выбрать два, также покрывающих всю прямую. Соответствующие полуплоскости пусть будут F_{n-1} и F_n. Рассмотрим теперь отдельно два возможных случая взаимного расположения полуплоскостей F_{n-1}, F_n и F_{n+1}.

а) Полуплоскость F_{n+1} содержит точку пересечения прямых l_{n-1} и l_n (черт. 67, *а*). В этом случае три полуплоскости F_{n-1}, F_n и F_{n+1} уже покрывают всю плоскость.

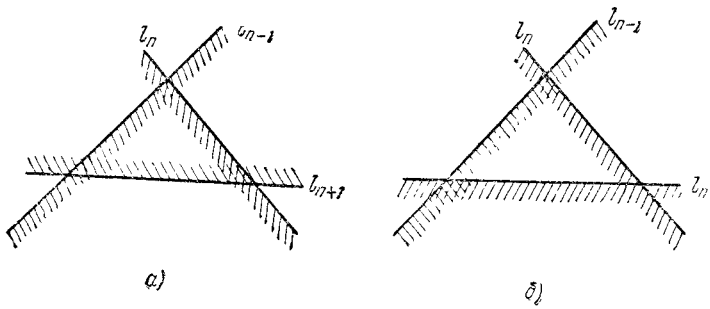
б) Полуплоскость F_{n+1} не содержит точки пересечения прямых l_{n-1} и l_n (черт. 67, *б*). В этом случае плоскость покрывается n полуплоскостями $F_1, F_2, \ldots, F_n$, и теорема следует из индуктивного предположения.

В. Предложение, сформулированное в условии задачи.

Р е ш е н и е. Доказательство проведем индукцией по числу n заданных полупространств.

1°. При $n=4$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение справедливо для n полупространств, и пусть задано $n+1$ полупространств



Черт. 67.

$V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}$. Границы этих полупространств обозначим соответственно через $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \pi_{n+1}$. Возможны два случая.

1-й с л у ч а й. Плоскость π_{n+1} целиком содержится в одном из полупространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$, например в V_n.

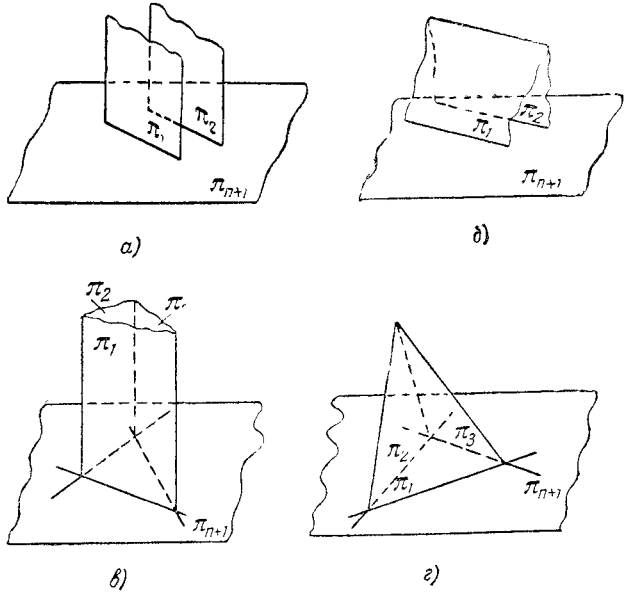
В этом случае плоскости π_{n+1} и π_n параллельны. Если полупространства V_{n+1} и V_n расположены по разные стороны от своих границ, то эти два полупространства уже заполняют все пространство. В противном случае одно из двух полупространств V_{n+1} и V_n целиком содержится в другом, и теорема следует из индуктивного предположения.

2-й с л у ч а й. Плоскость π_{n+1} не содержится ни в одном из полупространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Тогда она полностью покрывается этими полупространствами, которые высекают на ней $m \leqslant n$ полуплоскостей $F_1, F_2, \ldots, F_m$.

В силу результата Б из этих полуплоскостей можно выбрать две или три, также покрывающие всю плоскость (черт. 66, *а* и 67, *а*). Рассмотрим отдельно каждый из возможных здесь случаев.

а) Плоскость π_{n+1} покрывается двумя полуплоскостями (черт. 66, *а*), скажем, F_1 и F_2, причем соответствующие плоскости π_1 и π_2 параллельны (черт. 68, *а*). В этом случае все пространство заполняется двумя полупространствами V_1 и V_2.

б) Плоскость π_{n+1} покрывается двумя полуплоскостями F_1 и F_2, но соответствующие плоскости π_1 и π_2 пересекаются (черт. 68, *б*). Если полупространство V_{n+1} содержит линию пересечения плоскостей π_1 и π_2, то три полупространства V_1, V_2 и V_{n+1} заполняют все пространство. В противном случае полупространство V_{n+1} покрывается полупространствами V_1 и V_2, и теорема следует из индуктивного предположения.



Черт. 68.

в) Плоскость π_{n+1} покрывается тремя полуплоскостями (черт. 67, *а*), скажем F_1, F_2 и F_3, причем плоскость π_3 параллельна линии пересечения плоскостей π_1 и π_2 (соответствующие плоскости образуют «призму»; см. черт. 68, *в*). В этом случае три полупространства V_1, V_2 и V_3 заполняют все пространство.

г) Плоскость π_{n+1} покрывается тремя полуплоскостями F_1, F_2 и F_3, и плоскость π_3 не параллельна линии пересечения π_1 и π_2 (соответствующие плоскости образуют «пирамиду»; см. черт. 68, *г*). Если полупространство V_{n+1} содержит точку пересечения плоскостей F_1, F_2 и F_3, то четыре полупространства V_1, V_2, V_3 и V_{n+1} заполняют все пространство; в противном случае полупространство V_{n+1} покрывается

полупространствами V_1, V_2, V_3, и теорема следует из индуктивного предположения.

Задача 39. Доказать, что в пространстве не может существовать более четырех лучей, попарно образующих между собой тупые углы.

Указание. Пусть в пространстве задана некоторая конечная система лучей, попарно образующих между собой тупые углы, причем предположим, что эта система является максимальной в том смысле, что не существует ни одного луча, который с каждым из заданных лучей образует тупой угол. Отнесем каждому лучу полупространство, ограниченное плоскостью, перпендикулярной к этому лучу, и расположенное от нее по ту же сторону, что и луч. Ввиду максимальности нашей системы лучей эти полупространства заполняют все пространство, и наше утверждение следует из результата примера 34.

Пример 35. Доказать существование числа C_3, такого, что стороны каждого пространственного многоугольника $A_1, A_2, \ldots, A_n$, длина каждой из сторон которого не превосходит 1, можно переставить (не меняя их величин и направлений) таким образом, чтобы полученный в результате этой перестановки многоугольник можно было заключить в шар радиуса C_3.

Как и всюду в этом параграфе, рассмотрим сначала соответствующие «одномерную» и «двумерную» задачи.

А. На прямой задано n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причем длина каждого из отрезков A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 не превосходит 1. Доказать существование такого числа C_1 (не зависящего от положения точек и от числа n!), что отрезки A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 можно переставить на прямой таким образом, чтобы полученная «ломаная» $B_1B_2 \ldots B_nB_1$, каждое звено которой совпадает по величине и направлению с одним из звеньев «ломаной» $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_nA_1$, целиком лежала внутри отрезка длины $2C_1$.

Решение. Условимся считать длину a_i звена A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n$; за A_{n+1} принимается точка A_1) нашей «ломаной» $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ положительной, если точка A_{i+1} расположена правее A_i (мы считаем прямую, на которой лежат все точки, горизонтальной), и отрицательной в противном случае. Очевидно, $a_1 + a_2$ есть длина отрезка A_1A_3 (которая может быть согласно нашему условию положительной или отрицательной), $a_1 + a_2 + a_3$ — длина отрезка A_1A_4 и т. д., $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ — длина отрезка A_1A_n, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$ (это есть длина «отрезка A_1A_1»). Так как каждое «звено» ломаной $B_1B_2 \ldots B_nB_1$ равно какому-то звену первоначальной ломаной $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, то наше предложение можно сформулировать так:

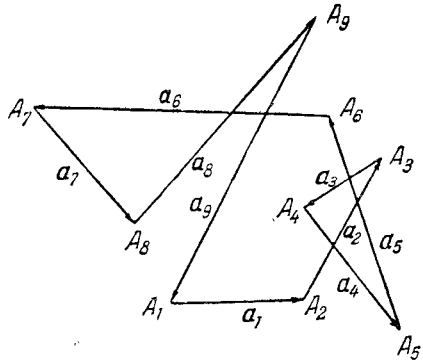
Даны n положительных и отрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, каждое из которых по абсолютной величине не превосходит единицы и сумма которых равна нулю; доказать, что эти числа можно расположить в таком порядке $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-1}}, a_{i_n}$ ($i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n$ суть те же номера $1, 2, \ldots, n-1, n$, но как-то переставленные), что все суммы a_{i_1}, $a_{i_1} + a_{i_2}$, $a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3}, \ldots, a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_{n-1}}$ по абсолютной величине не превосходят некоторого числа C_1 (не зависящего от последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и даже от числа n).

Докажем, что в качестве C_1 можно взять число 1. Пусть $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ — все положительные числа из последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а $a''_1, a''_2, \ldots, a''_q$ — все отрицательные числа ($p+q=n$). Возьмем столько первых положительных чисел $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ ($k \leqslant p$), чтобы их сумма не превзошла единицы (например, одно число a'_1), затем добавим столько отрицательных чисел $a''_1, a''_2, \ldots, a''_l$ ($l \leqslant q$), чтобы сумма всех выписанных чисел стала отрицательной, но по абсолютной величине была не больше единицы. Потом снова обратимся к положительным числам и т. д., пока не исчерпаем всех заданных чисел. Полученная при этом последовательность

$$a^*_1 = a'_1, a^*_2 = a'_2, \ldots, a^*_k = a'_k; a^*_{k+1} = a''_1, a^*_{k+2} = a''_2, \ldots, a^*_{k+l} = a''_l, \ldots$$

обладает, очевидно, требуемым свойством.

Б. На плоскости дан многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ (который может быть невыпуклым или даже самопересекающимся), причем длина каждой из сторон этого многоугольника не превосходит единицы

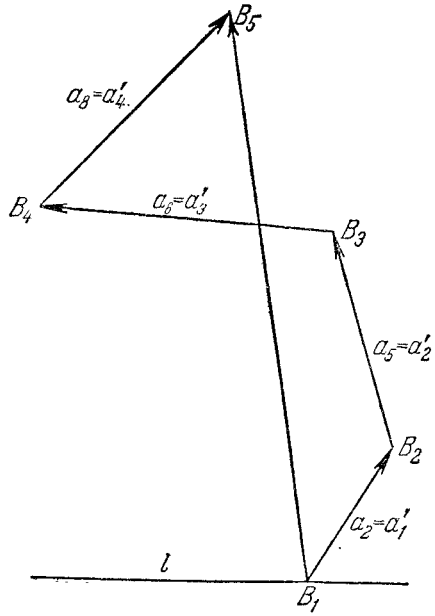


Черт. 69а.

(черт. 69, *а*). Доказать существование такого (не зависящего от многоугольника) числа C_2, что стороны многоугольника можно переставить, не меняя их величин и направлений, таким образом, чтобы полученный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ целиком помещался внутри круга радиуса C_2.

Решение. Докажем, что в качестве C_2 можно взять число $\sqrt{5}$. Обозначим стороны многоугольника $A_1A_2\ldots A_nA_1$, взятые по длине и направлению, т. е. рассматриваемые как векторы, через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Выберем из них некоторые векторы $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_s$ так, чтобы замыкающая $\overrightarrow{B_1B_s}$ (черт. 69, *б*) образуемой ими ломаной имела наибольшую возможную длину. Тогда проекции каждого из векторов $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_s$ на замыкающую $\overrightarrow{B_1B_s}$ будут иметь одно и то же направление, совпадающее с направлением $\overrightarrow{B_1B_s}$ (если бы проекция какого-нибудь вектора имела противоположное направление, то удаление

этого вектора привело бы к увеличению длины замыкающей). Наоборот, проекции всех остальных векторов $\boldsymbol{a}_1'', \boldsymbol{a}_2'', \ldots, \boldsymbol{a}_{n-s}''$ на $\overline{B_1B_s}$ имеют противоположное направление. Другими словами, можно считать, что проекции $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_s'$ векторов $\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2', \ldots, \boldsymbol{a}_s'$ на направление $\overline{A_1A_s}$ положительны ($0 \leqslant \alpha_i' \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$), а проекции $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots$



Черт. 69б.

$\ldots, \alpha_{n-s}''$ векторов $\boldsymbol{a}_1'', \boldsymbol{a}_2'', \ldots, \boldsymbol{a}_{n-s}''$ на то же направление отрицательны ($-1 \leqslant \alpha_j'' \leqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-s$). Обозначим еще (положительные или отрицательные) проекции векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ на прямую l, перпендикулярную к $\overline{B_1B_s}$, на которой выбрано «положительное» направление, через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Ясно, что $\beta_1' + \beta_2' + \ldots + \beta_s' = 0$ и $\beta_1'' + \beta_2'' + \ldots + \beta_{n-s}'' = 0$ (здесь β_1' — проекция вектора $\boldsymbol{a}_1'$, β_1'' — проекция вектора $\boldsymbol{a}_1''$ и т. д.); при этом $|\beta_1'| \leqslant 1$, $|\beta_2'| \leqslant 1, \ldots$, $|\beta_s'| \leqslant 1$ и $|\beta_1''| \leqslant 1$, $|\beta_2''| \leqslant 1, \ldots$, $|\beta_{n-s}''| \leqslant 1$. В силу п. А можно так расположить числа $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_s'$ и числа $\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_{n-s}''$, чтобы при любом ν выполнялись неравенства $\beta_1' + \beta_2' + \ldots + \beta_\nu' \leqslant 1$ и $\beta_1'' + \beta_2'' + \ldots + \beta_\nu'' \leqslant 1$. Если теперь все числа $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_s'$ и $\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_{n-s}''$ объединить в одну общую последовательность так, чтобы установленный выше по-

рядок следования чисел $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_s'$ и порядок следования чисел $\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_{n-s}''$ не нарушались, то сумма любого числа первых членов полученной последовательности не превзойдет 2.

Расположим теперь числа $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_s'$ и $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_{n-s}''$ в одну общую последовательность так, чтобы сумма любого числа первых членов этой последовательности по абсолютной величине не превзошла единицы. Как видно из рассуждения, проведенного в п. А, это можно сделать, не нарушая порядка следования чисел $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_s'$ и чисел $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_{n-s}''$ между собой. Пусть соответствующее расположение наших векторов будет $\boldsymbol{a}_1^*, \boldsymbol{a}_2^*, \ldots, \boldsymbol{a}_n^*$. Тогда для любого ν будем иметь:

$$\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_\nu^* \leqslant 1, \quad \beta_1^* + \beta_2^* + \ldots + \beta_\nu^* \leqslant 2,$$

где α_k^* и β_k^* — проекции $\boldsymbol{a}_k^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ на $\overline{B_1B_s}$ и на l. Так как проекции замыкающей ломаной, образованной векторами $\boldsymbol{a}_1^*, \boldsymbol{a}_2^*, \ldots, \boldsymbol{a}_\nu^*$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ на прямые $\overline{B_1B_s}$ и l равны соответственно $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_\nu^*$ и $\beta_1^* + \beta_2^* + \ldots + \beta_\nu^*$, то если длина этой замыкающей равна c_ν, то

$$c_\nu^2 = (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_n^*)^2 + (\beta_1^* + \beta_2^* + \ldots + \beta_\nu^*)^2,$$

т. е.

$$c_\nu^2 \leqslant 5, \quad c_\nu \leqslant \sqrt{5}.$$

Мы нашли, что расстояние любой вершины полученной векторной ломаной от фиксированной точки A_1 не превосходит $\sqrt{5}$; отсюда следует, что весь полученный многоугольник помещается в круге радиуса $\sqrt{5}$.

В. Предложение, сформулированное в начале примера.

Указание. Доказать, что в качестве C_3 можно взять $\sqrt{21}$. Рассуждение в этом случае аналогично проведенному в п. Б; β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_n$ будут проекции векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ на плоскость π, перпендикулярную к замыкающей $\overline{B_1B_s}$.

3. Нахождение геометрических мест с помощью индукции по числу измерений

Пример 36. Найти геометрическое место точек пространства, сумма квадратов расстояний которых от n заданных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ постоянна (равна d^2).

Рассмотрим последовательно следующие задачи.

А. На прямой даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Найти точки M прямой такие, что

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = d^2,$$

где d — заданное число.

Решение. Примем нашу прямую за числовую ось; пусть точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответствуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а искомой точке M — число x. В таком случае длины отрезков $MA_1, MA_2 \ldots, MA_n$ будут равны $(x - a_1), (x - a_2), \ldots$ $\ldots, (x - a_n)$ и, следовательно,

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = \\ = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2.$$

Но

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2 = \\ = x^2 - 2a_1x + a_1^2 + x^2 - 2a_2x + a_2^2 + \ldots + x^2 - \\ - 2a_nx + a_n^2 = \\ = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = \\ = n\left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - \\ - \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n}$$

или, если обозначить через A точку, соответствующую числу $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$,

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = nMA^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - \\ - \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n}. \qquad (15)$$

Таким образом,

$$nMA^2 = d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n}$$

и, значит,

$$MA = \sqrt{\frac{1}{n}\left[d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n}\right]}.$$

Это равенство, вообще говоря (если подкоренное выражение положительно), определяет две точки M, удовлетворяющие условию задачи (они расположены по одну и по другую сторону от точки A).

Б. Найти геометрическое место точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых от n заданных точек $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ постоянна (и равна d^2).

Решение[1]). Выберем на плоскости какую-нибудь (безразлично какую) прямоугольную систему координат и обо-

[1]) Иное решение этой задачи было намечено выше (см. задачу 20 на стр. 58).

значим проекции точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на ось x и на ось y соответственно через $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ и $A_1'', A_2'', \ldots, A_n''$; проекции точки M на оси координат обозначим через M' и M''. В таком случае

$$MA_1^2 = M'A_1'^2 + M''A_1''^2,$$
$$MA_2^2 = M'A_2'^2 + M''A_2''^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$MA_n^2 = M'A_n'^2 + M''A_n''^2$$

и, следовательно,

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = (M'A_1'^2 + M'A_2'^2 + \ldots + M'A_n'^2) + (M''A_1''^2 + M''A_2''^2 + \ldots + M''A_n''^2).$$

Но в силу формулы (15)

$$M'A_1'^2 + M'A_2'^2 + \ldots + M'A_n'^2 = nM'A'^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n},$$

$$M''A_1''^2 + M''A_2''^2 + \ldots + M''A_n''^2 = nM''A''^2 + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - \frac{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}{n},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — абсциссы и ординаты точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, A' и A'' — точки осей x и y с координатами $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ и $\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$. Таким образом,

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = nMA^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n} - \frac{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}{n} \qquad (16)$$

(A — точка плоскости, проектирующаяся на оси координат в точки A' и A''), откуда

$$nMA^2 = d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n} + \frac{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}{n}$$

и, значит,

$$MA = \sqrt{\frac{1}{n}\left[d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n} + \frac{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}{n}\right]},$$

т. е. искомое геометрическое место представляет собой окружность радиуса

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left[a^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)+\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}+\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n}\right]},$$

если

$$a>\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}-\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n}},$$

состоит из одной точки A, если

$$a=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}-\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n}},$$

и не содержит ни одной точки, если

$$a<\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}-\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{n}}.$$

В. Предложение, сформулированное в начале примера.

Указание. Рассмотреть прямоугольную систему координат x, y, z в пространстве, спроектировать все точки на плоскость xOy и на ось Oz; далее воспользоваться формулами (15) и (16).

4. Определение с помощью индукции по числу измерений

Пример 37. Определение медиан и центра тяжести тетраэдра.

А. Центром тяжести отрезка называется его середина.

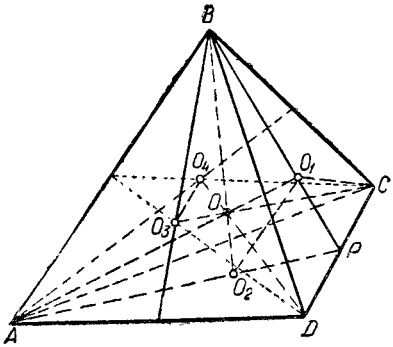
Б. Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую из его вершин с центром тяжести противоположной стороны. Известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке; эта точка называется центром тяжести треугольника.

В. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий любую из его вершин с центром тяжести противоположной грани.

Докажем, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке.

Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ (черт. 70), и пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры тяжести треугольников DBC, ACD, ABD и ABC. Так как прямые BO_1 и AO_2 пересекаются в середине P отрезка CD, то прямые AO_1 и BO_2 также пересекаются в некоторой точке O_{12}; аналогично AO_1 и CO_3, AO_1 и DO_4, BO_2

и CO_3, BO_2 и DO_4, CO_3 и DO_4 пересекаются в точках O_{13}, O_{14}, O_{23}, O_{24} и O_{34}. Докажем, что все эти точки совпадают (на чертеже — точка O). Действительно, если бы, например, O_{12} и O_{13} не совпадали, то прямые AO_1, BO_2 и CO_3 лежали бы в одной плоскости π (в плоскости $O_{12}O_{13}O_{23}$), но тогда и прямая DO_4, пересекающая AO_1, BO_2 и CO_3, лежала бы



Черт. 70.

в той же самой плоскости, т. е. все четыре вершины тетраэдра должны были бы лежать в одной плоскости π. Так как это неверно, то точки O_{12} и O_{13} должны совпадать; с этой точкой совпадают и все остальные точки O_{14}, O_{23}, O_{24}, O_{34}.

Точка пересечения медиан тетраэдра называется центром тяжести тетраэдра.

Задача 40. Доказать, что центр тяжести делит каждую из медиан тетраэдра в отношении 3:1, считая от вершины.

Указание. Воспользоваться тем, что центр тяжести треугольника делит медианы в отношении 2:1 (ср. пример 26).

Головина Лидия Ивановна
и *Яглом Исаак Моисеевич.*

Индукция в геометрии.

Редактор *С. М. Половинкин.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *Л. О. Сечейко.*

Печать с матриц. Подписано к печати 10/VIII 1961 г. Бумага 84 × 108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 3,125. Услови. печ. л. 5,13. Уч.-изд. л. 5,36. Тираж 35 000 экз. Т-08727. Цена книги 16 коп. Заказ № 2116.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.